

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra aplikované mechaniky

**Návrh metodiky k výpočtu modálních
vlastností rotoru 2-pólového asynchronního
elektromotoru**

Proposal of the Methodology for Computation
of Modal Properties of the Rotor of 2-pole
Asynchronous Electric Motor

Student:

Bc. Yasin Batiha

Osobní číslo:

BAT0034

Vedoucí diplomové práce:

Ing. Petr Ferfecki, Ph.D.

Ostrava 2020

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Yasin Batiha**
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství
Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika
Téma: **Návrh metodiky k výpočtu modálních vlastností rotoru 2-pólového asynchronního elektromotoru**
Proposal of the Methodology for Computation of Modal Properties of the Rotor of 2-pole Asynchronous Electric Motor

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

1. Vypracujte literární rešerši na téma zahrnutí rotoru elektromotoru do výpočtového modelu.
2. V prostředí ANSYS Workbench udělejte testovací úlohu k výpočtu modálních vlastností.
3. Realizujte výpočet vlastních frekvencí a tvarů rotoru elektromotoru.
4. Zkoumejte vliv vybraných výrobních a technologických parametrů na výpočet vlastních frekvencí.
5. Vypočítané modální parametry srovnajte s naměřenými.
6. Vypracujte metodiku k výpočtu modálních vlastností sestavy hřídele, rotorových tyčí a svazku rotorových plechů.

Seznam doporučené odborné literatury:

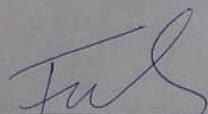
- [1] R. Pupadubsin, A. Steven, J.D. Widmer, B.C. Mecrow: Mechanical Material Properties for Structural Simulation Model of Switched Reluctance Machines, In: Proceedings of 2016 XXII International Conference on Electrical Machines (ICEM), Lausanne, Switzerland, 2016, DOI: 10.1109/ICELMACH.2016.7732841
- [2] M.S. Prem, M. Klanner, K. Ellermann: Vibration Analysis of a Rotor of an Electrical Rotating Machine with Stochastically Distributed Input Parameters, In: Proceedings of SIRM 2019 – 13 th International Conference on Dynamics of Rotating Machines, Copenhagen, Denmark, 2019
- [3] P. Millithaler: Dynamic Behaviour of Electric Machine Stators: Modelling Guidelines for Efficient Finite-element Simulations and Design Specifications for Noise reduction. Mechanics of the structures Université de Franche-Comté, 2015.
- [4] R. Gasch, H. Pfützner: Dynamika rotorů, SNTL Praha, 1. vydání, 1980, 163 s.
- [5] ANSYS, ANSYS reference manual.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.


Vedoucí diplomové práce: **Ing. Petr Ferfecki, Ph.D.**

Datum zadání: 20.12.2019

Datum odevzdání: 18.05.2020


doc. Ing. Martin Fusek, Ph.D.
vedoucí katedry




prof. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě dne 18. května 2020.

.....

Podpis studenta

Prohlašuji, že:

- jsem si vědom, že na tuto moji závěrečnou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. Zákon o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (dále jen Autorský zákon), zejména § 35 (Užití díla v rámci občanských či náboženských obřadů nebo v rámci úředních akcí pořádaných orgány veřejné správy, v rámci školních představení a užití díla školního) a § 60 (Školní dílo),
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo užít tuto závěrečnou diplomovou práci nekomerčně ke své vnitřní potřebě (§ 35 odst. 3 Autorského zákona),
- bude-li požadováno, jeden výtisk této diplomové práce bude uložen u vedoucího práce,
- s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 Autorského zákona,
- užít toto své dílo, nebo poskytnout licenci k jejímu využití, mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mě požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše),
- beru na vědomí, že podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů – že tato diplomová práce bude před obhajobou zveřejněna na pracovišti vedoucího práce a v elektronické podobě uložena a po obhajobě zveřejněna v Ústřední knihovně VŠB-TUO, a to bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě dne 18.května 2020.

.....

Podpis studenta

Poděkování

Předložená práce byla podpořena projektem specifického vysokoškolského výzkumu Tvorba multifyzikálního modelu asynchronního elektromotoru uzpůsobeného pro HPC (SP2020/139).

Rád bych tímto poděkoval společnosti Siemens, s.r.o. za možnost spolupráce a za cenná data, bez kterých by tato práce nemohla vzniknout.

Rovněž děkuji vedoucímu práce Ing. Petru Ferneckimu, Ph.D. za cenné rady a podněty při psaní této diplomové práce.

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

Batiha, Y. Návrh metodiky k výpočtu modálních vlastností rotoru 2-pólového asynchronního elektromotoru: diplomová práce. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky, 2020, 61 s. Vedoucí práce: Ferfecki, P.

Diplomová práce se zabývá výpočtem modálních vlastností rotoru s klecí nakrátko 2-pólového asynchronního elektromotoru. První část práce se věnuje studiu literatury zabírající se zahrnutím rotoru do výpočtového modelu. Následně je provedena testovací úloha zkoumající vliv kontaktů a předpětí na výsledky modální analýzy s předpětím. V praktické části práce jsou zkoumány vlivy technologických a výrobních parametrů a výsledky jsou porovnány s naměřenými hodnotami, které dodala společnost Siemens, s.r.o. Nakonec je navržena metodika k výpočtu modálních vlastností rotoru.

Klíčová slova: předeptatá modální analýza, metoda konečných prvků, rotor asynchronního elektromotoru, transversálně izotropní materiál

ANNOTATION OF MASTER THESIS

Batiha, Y. Proposal of the Methodology for Computation of Modal Properties of the Rotor of 2-pole Asynchronous Electric Motor: Master Thesis. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, 2020, 61 p. Thesis head: Ferfecki, P.

Master thesis deals with computation of modal properties of squirrel cage rotor of the 2-pole asynchronous electric motor. The first part of the work is devoted to the study of literature dealing with the inclusion of the rotor in the computational model. Subsequently, a test task examining the effect of contacts and prestress on the results of prestressed modal analysis is performed. In the practical part of the work, the influences of technological and production parameters are investigated, and the results are compared with measured values provided by company Siemens, s.r.o. Finally, a methodology for computing modal properties of a rotor is proposed.

Keywords: prestressed modal analysis, finite element method, rotor of asynchronous electric motor, transversely isotropic material

Obsah

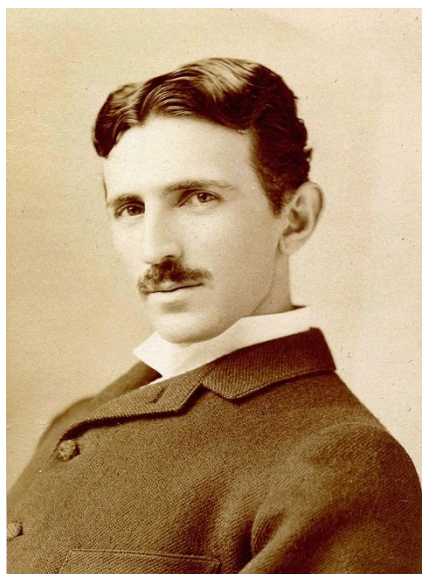
| | |
|--|----|
| Seznam použitých značek a symbolů | 8 |
| Úvod | 9 |
| 1. Zahnutí rotoru do výpočetního modelu | 10 |
| 1.1. Literární rešerše | 10 |
| 1.2. Asynchronní motory | 11 |
| 1.3. Elastická anizotropie | 14 |
| 1.3.1. Ortotropní materiály | 16 |
| 1.3.2. Transverzálně izotropní materiály | 17 |
| 1.4. Určení materiálových parametrů laminovaného jádra | 18 |
| 1.4.1. Určení modulů pružnosti | 19 |
| 1.4.2. Určení modulů pružnosti ve smyku | 20 |
| 1.4.3. Určení Poissonových konstant | 21 |
| 2. Testovací úloha k výpočtu modálních vlastností | 23 |
| 2.1. Vliv parametrů kontaktů | 25 |
| 2.2. Implementace předpětí do modální analýzy | 26 |
| 3. Výpočet vlastních frekvencí rotoru | 28 |
| 3.1. Model rotoru | 29 |
| 3.2. Vliv přesahu | 30 |
| 3.3. Vliv spojení sítě | 35 |
| 3.4. Naměřená data volného kmitání – ve společnosti Siemens, s.r.o. | 37 |
| 3.5. Vliv modulu pružnosti rotorového paketu | 40 |
| 3.6. Optimalizace materiálových parametrů rotorového paketu | 41 |
| 3.7. Vliv stažení rotorového paketu | 44 |
| 3.8. Vliv transversální izotropie rotorového paketu | 49 |
| 3.8.1. Modelování stažení skrze sílu | 52 |
| 3.8.2. Vliv rozdělení rotorového paketu | 53 |
| 4. Návrh metodiky řešení modální analýzy rotoru | 57 |
| 5. Závěr | 59 |
| Seznam použité literatury | 61 |

Seznam použitých značek a symbolů

| Symbol | Význam | Jednotky |
|---------------|-------------------------------------|----------------------|
| d | vektor stupňů volnosti | [m] |
| f | vektor sil | [N] |
| f | frekvence | [Hz] |
| n | otáčky | [min ⁻¹] |
| p | přesah | [mm] |
| q | konstantní vektor | [m] |
| r | poloměr | [m] |
| s | skluz | [%] |
| w | příčný rozměr | [m] |
| A | plocha | [m ²] |
| C | matice tuhosti materiálu | [MPa] |
| E | modul pružnosti v tahu materiálu | [MPa] |
| F | cílová funkce | [s ⁻²] |
| G | modul pružnosti ve smyku materiálu | [MPa] |
| K | matice tuhosti soustavy | [N·m ⁻¹] |
| L | podélný rozměr | [m] |
| P | reakční síla | [N] |
| R | konstantní matice | [-] |
| S | matice poddajnosti materiálu | [MPa ⁻¹] |
| V | objem | [m ³] |
| W | práce | [J] |
| a | diagonální matice pokutových členů | [N·m ⁻¹] |
| γ | smyková deformace | [-] |
| ε | poměrná deformace | [-] |
| λ | vektor Lagrangeových multiplikátorů | [N] |
| μ | Poissonova konstanta | [-] |
| σ | normálové napětí | [MPa] |
| τ | smykové napětí | [MPa] |
| Π | potenciální energie soustavy | [J] |
| ϕ | objemový podíl plechů k izolaci | [-] |

Úvod

Práci bych rád začal citátem připisovanému slavnému vynálezci Nikola Teslovi „*Pokud chcete nalézt tajemství vesmíru, je ukryto v pojmech energie, frekvence a vibrace.*“, neboť cílem modální analýzy je minimalizace energetické ztráty, eliminace vibrací, resp. hlučnosti, pročež je potřeba znalost jak vlastních, tak budících frekvencí strojní části, či soustavy. Tento vynálezce a vizionář Obr. 1 je nám inspirací a zdrojem zvědavosti i v této době přesycené informacemi, jak validními, tak mylnými.



Obr. 1 – Nikola Tesla [1]

V dnešní době výpočetní techniky je základním nástrojem k poznání výše uvedených vlastností soustavy modální analýza za použití metody konečných prvků. Tato metoda umožňuje řešit úlohy s libovolnou geometrií, zatížením, či materiálovými vlastnostmi. S rostoucí kapacitou výpočetní techniky roste i možnost detailnější simulace, čímž roste přesnost výsledků. I přesto je experiment s reálným modelem stále považován za metodu určující a nejpřesnější, potřebný ke kalibraci výpočetních modelů.

Modální analýza slouží k určení dynamických vlastností tělesa, či soustavy těles. Mezi nejdůležitější úkoly patří určení rezonančních frekvencí. Při zatížení budící silou o této frekvenci dochází k viditelnému nárůstu vibrací z důvodu akumulace vibrační energie. Každá vlastní frekvence má odpovídající vlastní tvar, který popisuje relativní deformaci tělesa při této frekvenci.

Cílem práce je navržení metodiky tvorby výpočetního modelu a vyřešení vlastních frekvencí rotoru elektromotoru. V první části budou popsány asynchronní motory a bude provedena literární rešerše zaobírající se zahrnutím rotoru elektromotoru do výpočetního modelu. Následovat bude testovací úloha, zkoumající vliv kontaktů a předpětí na výsledky modální analýzy. Nakonec budou poznatky aplikovány na reálný model rotoru 2-pólového asynchronního elektromotoru a výsledky budou porovnány s měřením.

1. Zahrnutí rotoru do výpočetního modelu

1.1. Literární rešerše

Pro korektní návrh metodiky výpočtového modelu je základním úkolem pochopení funkce dané součásti a znalost designových kritérií. Kniha autorů Toliyata a Klimana [2] podává zevrubný popis elektrických motorů z hlediska konstrukčního a funkčního. Rotor elektromotoru je tvořen třemi komponenty, jmenovitě z rotorového svazku, tvořeného paketem na sobě naskládaných plechů izolovaných dielektrikem a vinutím, a dále hřídelí na které je svazek nalisován.

Při modelování rotoru metodou konečných prvků nastává problém, neboť vinutí a laminované jádro nelze běžně počítat jako heterogenní 3D těleso z důvodu výpočetní náročnosti. Millithaler ve své disertační práci [3] udává výčet a možnosti implementace metod vhodných k homogenizaci laminovaného jádra, a dále se věnuje i problematice modelování vinutí na statorovém svazku. Pupadubsin a kolektiv v článku [4] se věnují homogenizaci laminovaného jádra metodou z teorie laminárních kompozitů a porovnávají výsledky s numerickou simulací metodou konečných prvků. Homogenizací kompozitních materiálů se zabývá i Jones v knize [5].

Teorii anizotropního elastického tělesa se věnuje kniha [6] autora Lekhnitskije, kde jsou odvozeny základní konstitutivní vztahy Hookeova zákona pro různé materiálové symetrie. Dále publikace [7] uvádí výše zmíněné vztahy v kondenzované formě a moderní notaci.

V této práci jsou prováděny všechny numerické výpočty v prostředí softwaru Ansys Workbench. Zdrojem poznatků pro nastavení numerické analýzy je kniha [8], která se zabývá modelováním 3D těles metodou konečných prvků s aplikacemi v komerčním softwaru Ansys. Dále dokumentace Ansysu [9] se detailně zabývá kontakty použitelnými v daném softwaru.

1.2. Asynchronní motory

Asynchronní nebo též indukční motor patří ke globálně nejrozšířenějším pohonům s aplikacemi, jak v domácnosti, tak ve všech průmyslových odvětvích. Název indukční vychází z metody přenosu energie z vinutí na stacionární části (statoru) na rotující část (rotor). K přenosu energie dochází na základě principu elektromagnetické indukce. Relativní pohyb magnetického pole statorového vinutí a vodičů na rotoru indukují napětí na rotoru, kde se tak indukují další magnetické pole. Výsledkem interakce těchto magnetických polí je generovaný točivý moment, viz.

Rychlost točivého magnetického pole statoru musí být vyšší než otáčky rotoru, aby docházelo ke generaci napětí na rotoru a tím ke generaci magnetického pole a tím i točivého momentu na rotoru. Rozdíl mezi hodnotou synchronní rychlostí magnetického pole statoru a mechanickými otáčkami rotoru je definován veličinou nazvanou skluz:

$$s = \frac{n_0 - n}{n_0} \cdot 100 [\%], \quad 1.1$$

kde n_0 jsou synchronní otáčky magnetického pole statoru a n mechanické otáčky rotoru. Pro většinu asynchronních motorů platí, že při pracovním zatížení je skluz menší než 5 %. Rychlost otáček může být ovlivněna zvyšující se teplotou rotoru, či změnou napětí na vstupu. Synchronní otáčky indukčního motoru lze určit ze vztahu:

$$n_0 = \frac{60f}{N_p/2} [\text{ot}/\text{min}], \quad 1.2$$

kde f je frekvence sítě a N_p je počet magnetických pólů statoru. Vztah vychází ze skutečnosti, že magnetické pole se pohybuje od jednoho statorového pólu k dalšímu za polovinu elektrického cyklu, potažmo za 360 elektrických stupňů projde skrze jeden pár pólů. V Tab. 1 jsou zobrazeny běžné hodnoty synchronních otáček a otáček rotoru pro různé počty pólů v přenosové soustavě Americké (60 Hz) a Evropské (50 Hz).

| Počet pólů | Otáčky indukčních motorů [Hz] | | | |
|------------|-------------------------------|---------------|--------------|---------------|
| | 60 Hz | | 50 Hz | |
| | Bez zatížení | Plné zatížení | Bez zatížení | Plné zatížení |
| 2 | 3600 | 3450 | 3000 | 2850 |
| 4 | 1800 | 1725 | 1500 | 1425 |
| 6 | 1200 | 1140 | 1000 | 940 |
| 8 | 900 | 850 | 750 | 700 |

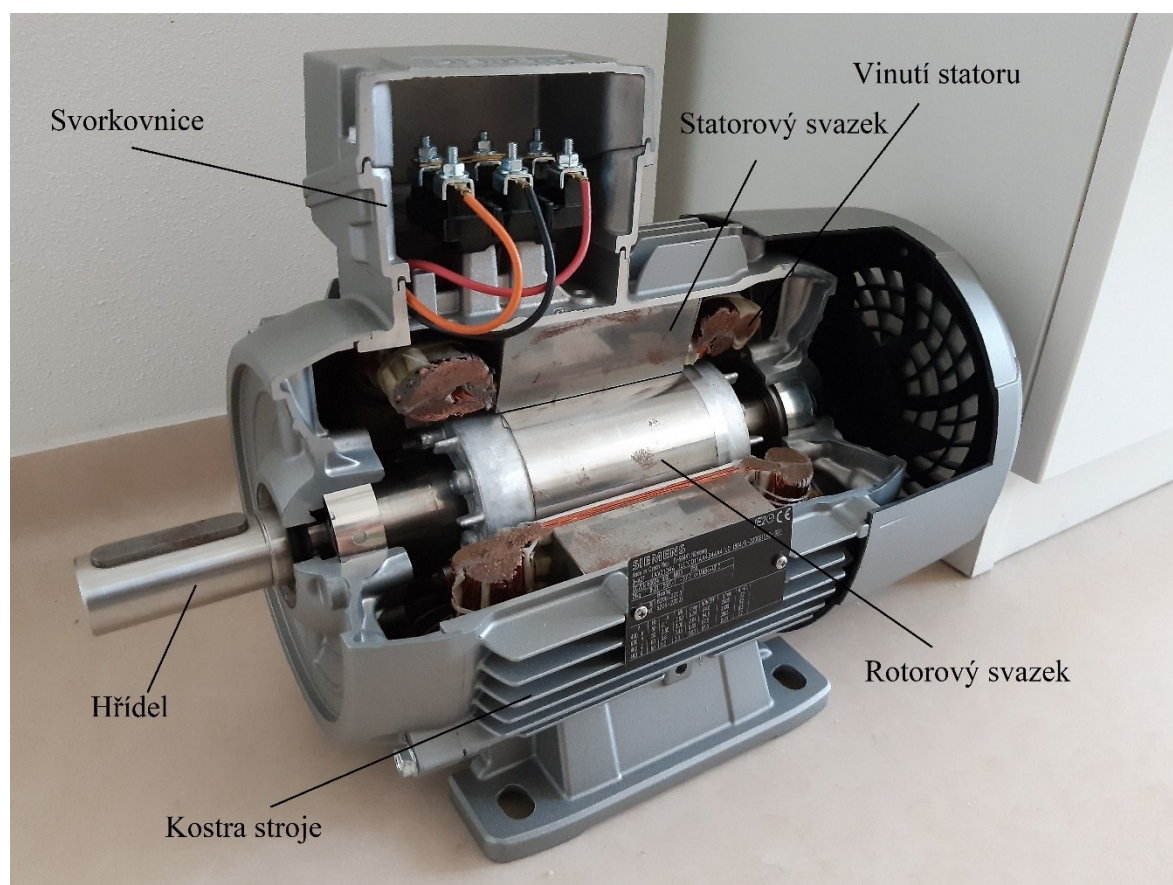
Tab. 1 – Nominální hodnoty otáček indukčních motorů [2]

Běžné hodnoty skluzu jsou v rozsahu 1–5 %. Výjimku tvoří motory s vysokou účinností, kde se hodnota skluzu pohybuje okolo 1 %, viz [2].

Konstrukčně se asynchronní motor skládá z kostry stroje, statoru a rotoru, viz Obr. 2. Stator, který je součástí kostry stroje, je tvořen statorovým svazkem. Jedná se o vzájemně spojené plechy, které jsou nejčastěji slepeny a vzájemně izolovány dielektrikem, s drážkami, kde se nachází jednofázové nebo třífázové vinutí. Rotor se skládá z rotorového svazku nalisovaného na hřídeli. Hřídel je uložena v ložiskách v kostře stroje. Na kostře stroje se dále nachází svorkovnice, která je zdrojem energie a je spojena s vinutím statoru. Součástí stroje, může být ventilátor nebo jiné chlazení stroje.

Asynchronní motory dělíme dle vinutí na rotorovém svazku na motory s kotvou na krátko Obr. 2 a na motory s kroužkovou kotvou Obr. 3. Kroužková kotva má v drážkách vinutí z izolovaných vodičů zapojených do hvězdy, či trojúhelníka. Fáze vinutí jsou dále spojeny s kroužky na hřídeli, které jsou skrz kartáče spojeny s rezistory. Tento externí odpor snižuje rozběhové proudy a tím zvyšuje rozběhový moment.

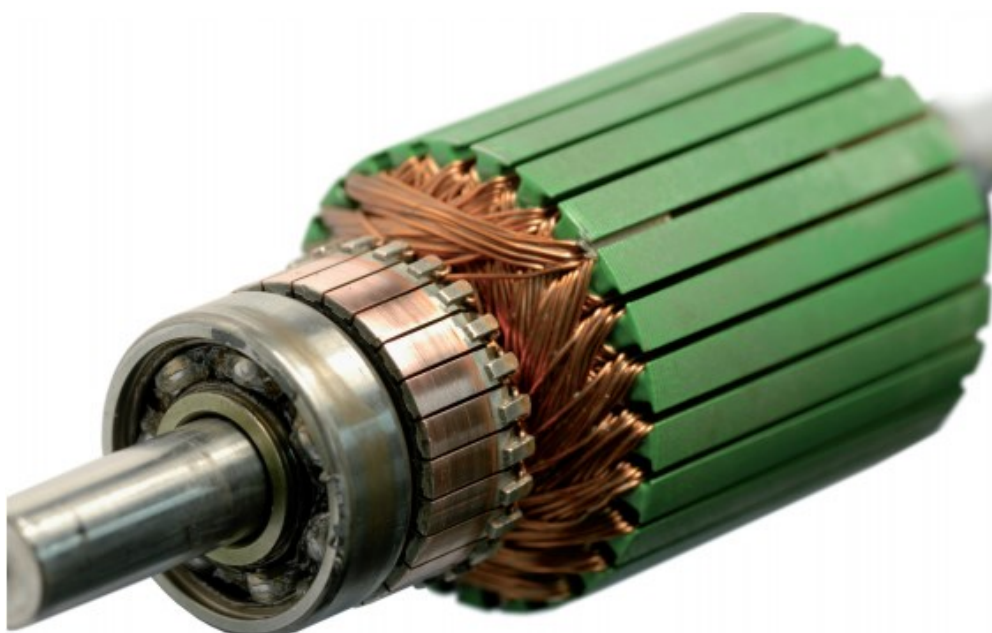
Kotva nakrátko má v drážkách vodivé tyče, nejčastěji z hliníku, který je paramagnetický



Obr. 2 – Model asynchronního motoru s klecí nakrátko

nebo z mědi pro použití v motorech s většími výkony. Tyto tyče nebývají rovnoběžné s osou rotoru, ale mírně zkosené. Jejich výroba se realizuje téměř výhradně tlakovým litím. Rozběhová charakteristika motoru může být zlepšena speciálním tvarem drážek a tyčí motoru.

Výrobní cena rotoru s klecí nakrátko je výrazně nižší než u rotoru s kroužkovou klecí pro motory menší a střední, neboť se jedná výlučně o vinutí z mědi a proces výroby je principiálně náročnější. U větších motorů, kdy se jedná již o výhradně kusovou výrobu, se u konstrukcí rotoru s kotvou nakrátko a kroužkovou kotvou cena výrazně neliší.



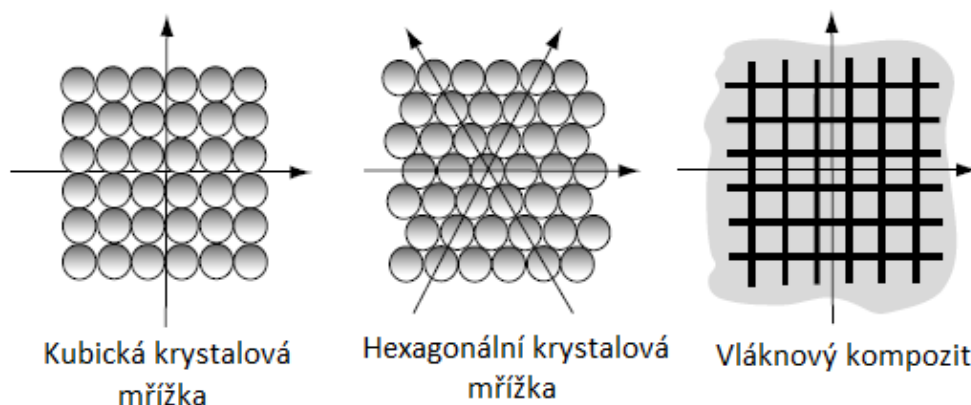
Obr. 3 – Rotor s kroužkovou kotvou [10]

Design s kroužkovou kotvou je méně robustnější, lze u něj měnit výstupní otáčky, a disponuje vysokými rozběhovými točivými momenty. Motor s kotvou nakrátko navzdory robustnějšímu designu nízkému rozběhovému točivému momentu disponuje vyšší efektivitou, je méně náchylný k poruchám a snadno vyrobitelný i v malých verzích. Proto je kotva nakrátko nejčastější variantou až na výjimky, kde je potřeba vysokého startovacího točivého momentu, a to například u jeřábů, výtahů, či průmyslových zvedáků.

1.3. Elastická anizotropie

Deformační chování materiálů je závislé na směru, a proto napětově deformační charakteristika materiálu v jednom směru se bude obecně lišit oproti směru jinému. Prvotní motivací ke studiu těchto vlastností byly přírodní materiály jako dřevo nebo krystalické materiály [7].

Směrová závislost chování materiálů běžně vychází z vlastností jeho mikrostruktury. U syntetických i organických materiálů obvykle dochází k formování mikrostruktur s určitými symetriemi. Na Obr. 4 jsou zobrazeny idealizované mikrostruktury kubické a hexagonální krystalové mřížky spolu s vláknovým kompozitem, a jsou naznačeny jejich symetrie. Směrové vlastnosti materiálu mohou být ovlivněny i metodami zpracování jako válcování (globálně), či svařování (lokálně), apod.



Obr. 4 – Materiálové mikrostruktury s naznačenými symetriemi [7]

Obecná forma Hookeova zákona pro anizotropní materiály má v maticovém zápisu tvar:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & . & . & . & C_{16} \\ C_{21} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ C_{61} & . & . & . & . & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad 1.3$$

kde σ je normálové napětí, τ smykové napětí, ε normálová poměrná deformace, γ poměrná smyková deformace a C jsou elastické tuhosti. Hookeův zákon lze zapsat ve zkrácené notaci (viz Tab. 2) a za pomoci Einsteinovy konvence:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad i, j = 1, \dots, 6. \quad 1.4$$

Matice elastických tuhostí obsahuje 36 konstant, lze ale dokázat, že počet nezávislých konstant je nižší, [5]. Důkaz vychází z deformační energie elastického materiálu. Přírůstek práce na jednotkovém obsahu lze zapsat:

$$dW = \sigma_i d\varepsilon_i. \quad 1.5$$

Dosazením 1.4 do 1.5 se dostane:

$$dW = C_{ij}\varepsilon_i d\varepsilon_j. \quad 1.6$$

| Složky tenzoru napětí | | Složky tenzoru deformace | |
|-----------------------|-----------------|--------------------------|-----------------|
| Klasická notace | Zkrácená notace | Klasická notace | Zkrácená notace |
| σ_x | σ_1 | ϵ_x | ϵ_1 |
| σ_y | σ_2 | ϵ_y | ϵ_2 |
| σ_z | σ_3 | ϵ_z | ϵ_3 |
| τ_{yz} | σ_4 | γ_{yz} | ϵ_4 |
| τ_{zx} | σ_5 | γ_{zx} | ϵ_5 |
| τ_{xy} | σ_6 | γ_{xy} | ϵ_6 |

Tab. 2 – Zkrácená notace

Integrací 1.6 přes poměrné deformace se získá práce na jednotku objemu:

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} \epsilon_i \epsilon_j \quad 1.7$$

a z tohoto vztahu lze zpětnou derivací odvodit Hookeův zákon:

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_i} = C_{ij} \epsilon_j. \quad 1.8$$

Další derivací se získá:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_i \partial \epsilon_j} = C_{ij}. \quad 1.9$$

Shodným postupem lze získat:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_i} = C_{ji}. \quad 1.10$$

Obecně platí, že pořadí derivace není závislé na materiálu, a proto:

$$C_{ij} = C_{ji}. \quad 1.11$$

Tento závěr implikuje, že matice elastických tuhostí je symetrická a existuje pouze 21 nezávislých elastických konstant popisující elastické anizotropní těleso. Inverzí Hookeova zákona se získá vztah:

$$\epsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad 1.12$$

kde S_{ij} je matice materiálových poddajností a jedná se o matici inverzní k matici materiálových tuhostí. Práce na jednotkovém objemu se může zapsat shodně s 1.7:

$$W = \frac{1}{2} S_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad 1.13$$

a lze dokázat, že platí:

$$S_{ij} = S_{ji}. \quad 1.14$$

1.3.1. Ortotropní materiály

Ortotropní materiál na Obr. 5 má tři vzájemně kolmé roviny symetrie. Mezi tyto materiály patří dřevo, či vláknové kompozity. Matice elastických tuhostí se vlivem symetrie zjednoduší na:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ . & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & C_{44} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & C_{55} & 0 \\ . & . & . & . & . & C_{66} \end{bmatrix}. \quad 1.15$$

Z matice je patrné, že pro popis ortotropního materiálu je potřeba 9 nezávislých materiálových konstant. Dále lze pozorovat [7], že vymizením poměrných smykových deformací vymizí i smykové napětí, a proto osy hlavního napětí odpovídají osám hlavních poměrných deformací.

Matici poddajnosti ortotropního materiálu lze zapsat využitím inženýrských konstant ve tvaru [5]:

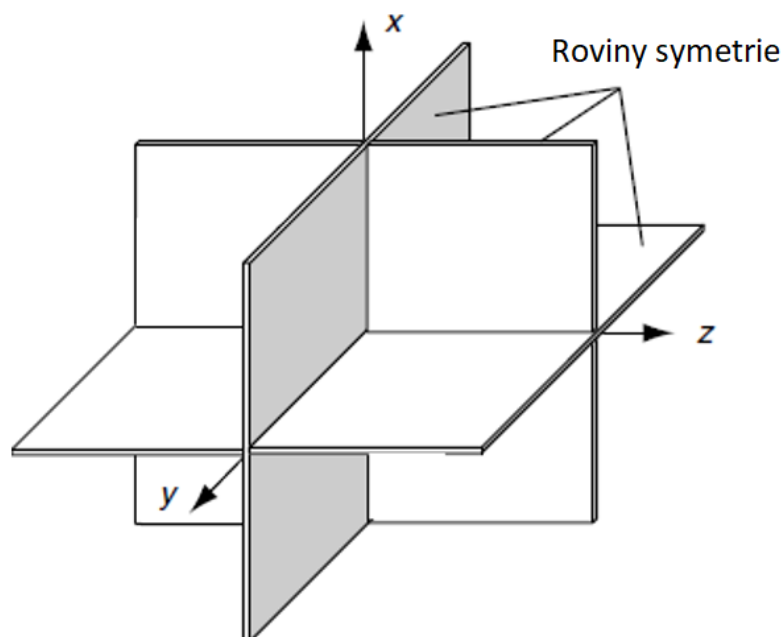
$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad 1.16$$

kde E_i je modul pružnosti v daném směru, G_{ij} je smykový modul pružnosti v rovině definované směry i a j , a μ_{ij} je Poissonova konstanta definovaná:

$$\mu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}. \quad 1.17$$

Vzhledem k symetrii matice 1.16 dané vztahem 1.14 platí pro ortotropní materiály:

$$\frac{\mu_{ij}}{E_i} = \frac{\mu_{ji}}{E_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j. \quad 1.18$$



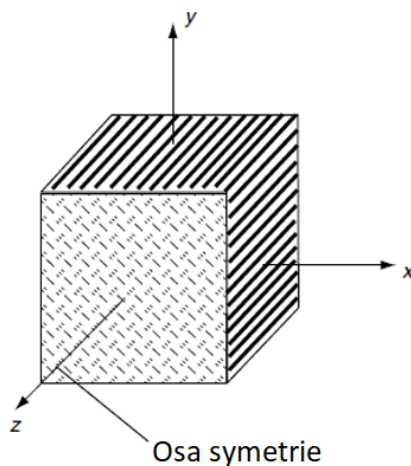
Obr. 5 – Roviny symetrie ortotropního materiálu [7]

1.3.2. Transverzálně izotropní materiály

Dalším typem je materiálová symetrie osová, která je zobrazena na Obr. 6. Materiál s rovinou, ve které jsou elastické vlastnosti nezávislé na směru neboli s rovinou izotropie se nazývá transversálně izotropní. V takovém případě má matice elastických konstant tvar [6]:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix}. \quad 1.19$$

Tento typ symetrie redukuje počet nezávislých elastických konstant na 5. Typickým příkladem takového materiálu jsou kompozity s vlákny s kruhovým průřezem, nebo laminátové kompozity.



Obr. 6 – Osa symetrie transversálně izotropního materiálu [7]

1.4. Určení materiálových parametrů laminovaného jádra

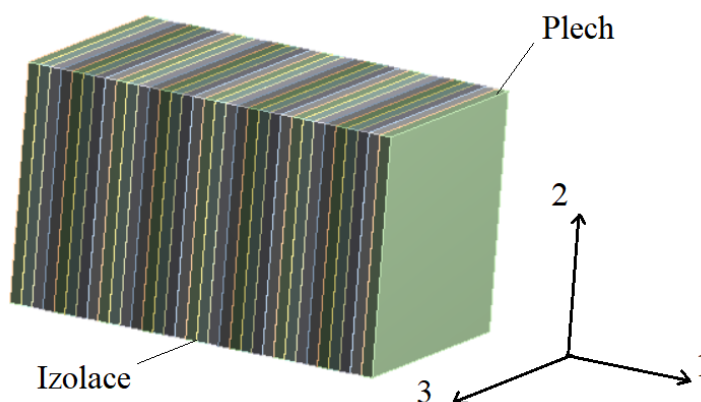
V kapitole 1.2 bylo zmíněno, že rotorový svazek se skládá z balení plechů a izolací, který je následně stažen a držen pohromadě tzv. klecí, která je tvořena buďto vinutím (kroužková kotva) nebo rotorovými tyčemi spojenými čely, které tak svazek uzavírají (kotva nakrátko).

Modelování laminovaného jádra jako separovaných vrstev je výpočetně velice náročné, a proto je vhodné jej aproximovat a modelovat jako homogenní těleso. Těmito metodami se zabývají v pracích [3], či [4]. Základní metodou je využití vztahů z teorie laminovaných kompozitů v originále nazývané jako „rule of mixtures“ [5]. Tato metoda je založena na dekompozici napětí a deformace tělesa a aproximuje laminované jádro jako transversálně izotropní materiál. Metoda je vhodná pouze pro jádro tvořené izotropními materiály.

Odvození vztahů je založeno na základních předpokladech:

- Laminované jádro je:
 - Lineárně elastické
 - Makroskopicky homogenní
 - Makroskopicky ortotropní
- Plechy a izolace jsou:
 - Lineárně elastické
 - Homogenní
 - Izotropní
 - Dokonale spojené
 - Pravidelně uspořádané

Existují dva možné přístupy aproximace, a to přístup pružnosti a pevnosti který bude následně odvozen, nebo detailnější přístup s využitím teorie pružnosti, který lze najít v knize [5].



Obr. 7 – Orientace laminovaného jádra

1.4.1. Určení modulů pružnosti

Paket laminovaného jádra je včetně orientace zjednodušeně zobrazen na Obr. 7. Vzhledem k symetrii platí, že materiálové vlastnosti ve směru 2 jsou shodné se směrem 3:

$$E_2 = E_3. \quad 1.20$$

V následujícím odvození náleží index p plechům a index i izolaci. Dále je využívána bezrozměrná veličina udávající objemový podíl plechů na paketu daný vztahem, který lze vyjádřit v podélných rozměrech, neboť příčný rozměr plechů a izolace je shodný:

$$\Phi = \frac{V_p}{V_p + V_i} = \frac{AL_p}{AL_p + AL_i} = \frac{L_p}{L_p + L_i}. \quad 1.21$$

Nejprve je uvažováno jednoosé namáhání tahem ve směru 1. V tomto případě platí, že napětí na plechách je shodné s napětím na izolaci:

$$\sigma_1 = \sigma_i = \sigma_p. \quad 1.22$$

Celková deformace ve směru 1 je potom:

$$\Delta_1 = L\varepsilon_1 = \Delta_i + \Delta_p = L_i\varepsilon_i + L_p\varepsilon_p = L[\varepsilon_i(1 - \phi) + \varepsilon_p\phi], \quad 1.23$$

kde Δ je deformace a L je délka paketu. Dále je vyjádřena poměrná deformace ve směru 1 a je dosazen upravený vztah 1.23:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \varepsilon_i(1 - \phi) + \varepsilon_p\phi. \quad 1.24$$

Poměrné deformace na plechu a izolaci lze vyjádřit jako:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_i}, \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p}. \quad 1.25$$

Dosazením 1.25 s využitím 1.22 do vztahu 1.24 se po úpravě dostane:

$$E_1 = \left(\frac{\phi}{E_p} + \frac{1 - \phi}{E_i} \right)^{-1}. \quad 1.26$$

Při odvození modulu pružnosti ve směru 2 se vychází z jednoosého namáhání ve směru 2. V tomto případě je deformace plechů i izolace ve směru 2 shodná:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_i = \varepsilon_p. \quad 1.27$$

Napětí na izolaci a na plechu má pak tvar:

$$\sigma_i = E_i\varepsilon_2, \sigma_p = E_p\varepsilon_2. \quad 1.28$$

Reakční sílu lze vyjádřit jako:

$$P = \sigma_2 A = \varepsilon_2 E_2 A = \sigma_i A_i + \sigma_p A_p = A[\sigma_i(1 - \phi) + \sigma_p\phi]. \quad 1.29$$

Dosazením 1.28 do 1.29 vychází po úpravě vztah:

$$E_2 = E_i(1 - \phi) + E_p\phi. \quad 1.30$$

1.4.2. Určení modulů pružnosti ve smyku

Vzhledem k symetrii platí, že hodnota modulu pružnosti ve smyku v rovině 12 je shodná s hodnotou v rovině 13:

$$G_{12} = G_{13}. \quad 1.31$$

Hodnota modulu pružnosti ve smyku je definována v dané rovině, a proto platí:

$$G_{ij} = G_{ji}. \quad 1.32$$

Odvození modulu pružnosti ve smyku v rovině 12 je patrné z Obr. 8. Deformace plechů bude menší než deformace izolace. Při zatížení pouze smykovým napětím v rovině 12 je smykové napětí na plechách shodné se smykovým napětím na izolaci:

$$\tau_p = \tau_i = \tau. \quad 1.33$$

Smyková deformace je:

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{12}}. \quad 1.34$$

Deformaci laminátu lze pak vyjádřit:

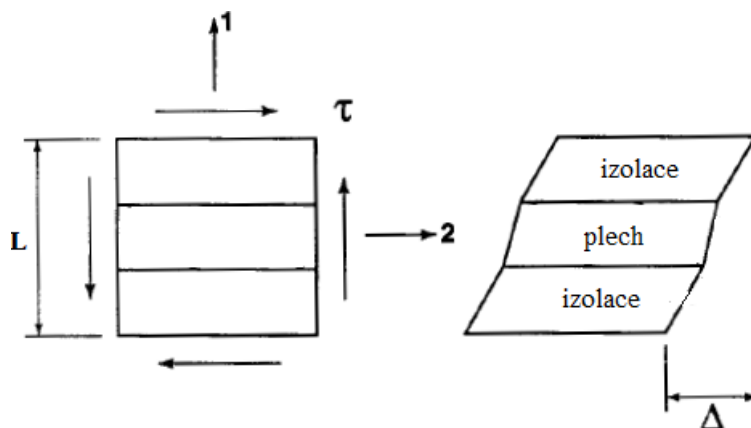
$$\Delta = \gamma L = \Delta_i + \Delta_p = L[\gamma_i(1 - \phi) + \gamma_p\phi]. \quad 1.35$$

Smyková deformace plechů, resp. izolace je:

$$\gamma_p = \frac{\tau}{G_p}, \gamma_i = \frac{\tau}{G_i}. \quad 1.36$$

Dosazením vztahů 1.34 a 1.36 do 1.35 lze po úpravě vyjádřit:

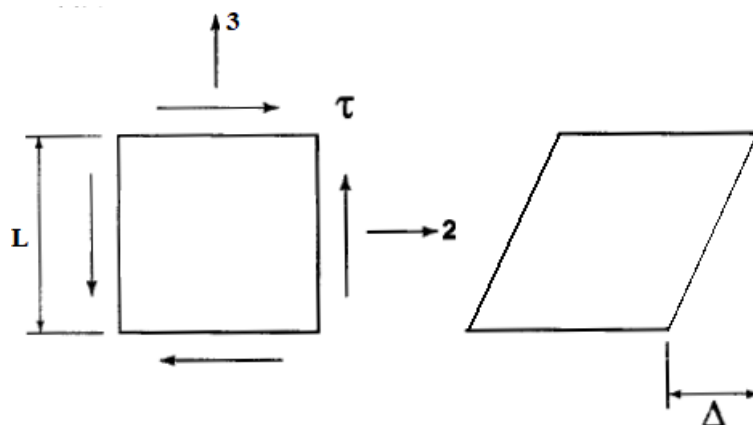
$$G_{12} = \left(\frac{1 - \phi}{G_i} + \frac{\phi}{G_p} \right)^{-1}. \quad 1.37$$



Obr. 8 – Odvození smykového modulu pružnosti v rovině 12

Smykový modul pružnosti v rovině 23 je odvozen z konfigurace zatížení zobrazené na Obr. 9. Při zatížení smykovým napětím v rovině 23 bude výsledná smyková deformace rovna smykovým deformacím na plechách i izolacích:

$$\gamma = \gamma_i = \gamma_p. \quad 1.38$$



Obr. 9 – Odvození smykového modulu v rovině 23

Smykové napětí lze vyjádřit jako:

$$\tau = \gamma G_{23}, \quad 1.39$$

nebo pomocí reakční síly:

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{\tau_i A_i + \tau_p A_p}{A} = \tau_i (1 - \phi) + \tau_p \phi. \quad 1.40$$

Smykové napětí na plechách, resp. izolaci:

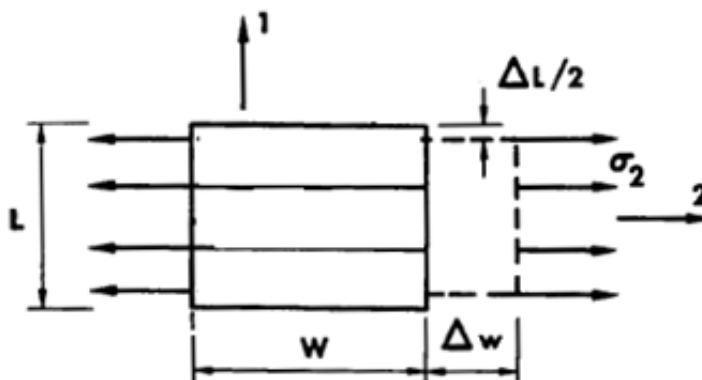
$$\tau_p = \gamma G_p, \tau_i = \gamma G_i. \quad 1.41$$

Dosazením 1.39 a 1.41 do 1.40 lze po úpravě vyjádřit:

$$G_{23} = G_i (1 - \phi) + G_p \phi. \quad 1.42$$

1.4.3. Určení Poissonových konstant

Jak bylo zmíněno v kapitole 1.3.2 k popisu transversálně izotropního materiálu je potřeba 5 vzájemně nezávislých konstant. Poslední konstanta, kterou lze za daných předpokladů odvodit je Poissonova konstanta μ_{21} .



Obr. 10 – Odvození Poissonovy konstanty μ_{21}

Odvození vychází z Obr. 10, kdy je uvažováno jednoosé namáhání ve směru 2. Poissonova konstanta μ_{21} je definovaná jako:

$$\mu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad 1.43$$

Deformaci ve směru 1 pak lze vyjádřit jako:

$$\Delta L = -L\varepsilon_1 = wL\varepsilon_2 \quad 1.44$$

nebo jako součet deformace plechů a izolací:

$$\Delta L = \Delta L_i + \Delta L_p. \quad 1.45$$

Deformace plechů a izolací lze psát ve tvaru:

$$\Delta L_i = L(1 - \phi)\mu_i\varepsilon_2, \quad \Delta L_p = L\phi\mu_p\varepsilon_2. \quad 1.46$$

Porovnáním vztahů 1.44 a 1.45 a následným dosazením 1.46 lze μ_{21} zapsat jako:

$$\mu_{21} = (1 - \phi)\mu_i + \phi\mu_p. \quad 1.47$$

Zbývající Poissonovy konstanty lze určit z již vypočtených vztahů. Vzhledem k symetrii laminátu platí:

$$\mu_{21} = \mu_{31}, \mu_{12} = \mu_{13}, \mu_{23} = \mu_{32}. \quad 1.48$$

Ze symetrie matice poddajnosti vyplývá vztah 1.18, pomocí kterého lze dopočítat, že:

$$\mu_{12} = \mu_{21} \frac{E_1}{E_2}. \quad 1.49$$

Poslední neznámou μ_{23} lze určit za pomoci vztahu pružnosti, vyjadřující modul pružnosti ve smyku za pomoci modulu pružnosti v tahu a Poissonovy konstanty:

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \mu_{23})} \quad 1.50$$

a po úpravě:

$$\mu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1. \quad 1.51$$

2. Testovací úloha k výpočtu modálních vlastností

Testovací úloha je provedena na jednoduché úloze náboje nalisovaného na hřídeli. Cílem této úlohy je objasnit vliv dílčích parametrů na přesnost řešení modální analýzy s předpětím. Předepjatá modální analýza sestává ze dvou kroků, a to: statická analýza a modální analýza s předpětím. Ve statické analýze jsou definovány kontakty a předpětí, které je následně implementováno v modální analýze.

Kontakty mezi tělesy jsou často nezbytnou součástí analýzy, která ale vnáší geometrickou nelinearitu do výpočtu a tím zvyšuje výpočetní náročnost úlohy. Ve výpočtovém systému ANSYS se rozlišuje 5 typů kontaktů, a to:

- „Bonded“ (slepený) – není povolen žádný vzájemný pohyb,
- „No separation“ (nerozdělitelný) – vzájemný pohyb umožněn pouze v tečné rovině kontaktních ploch,
- „Rough“ (drsňý) – pohyb umožněn pouze ve směru normály tečné roviny kontaktu,
- „Frictionless“ (bez tření) – volný pohyb bez zahrnutí tření mezi kontaktními plochami,
- „Frictional“ (se třením) – volný pohyb včetně tření mezi kontaktními plochami.

Kontakty jsou definovány vazbovými rovnicemi ve tvaru [8]:

$$\mathbf{R}\mathbf{d} - \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad 2.1$$

kde \mathbf{d} je vektor stupňů volnosti, \mathbf{R} je konstantní matice a \mathbf{q} je konstantní vektor. Dosazení těchto rovnic do konečnoprvkové soustavy rovnic modelu však není vhodné z důvodu algoritmizace řešení. Proto jsou v komerčních softwarech používány formulace, které umožňují zahrnout tyto rovnice do řešení nepřímo. Nejvýznamnější z těchto formulací jsou: „Multi-point constraint“ (MPC), metoda Lagrangeových multiplikátorů, metoda pokutových členů a rozšířená Lagrangeova metoda.

MPC formulace umožňuje vzájemné svázání stupňů volnosti uzlů. Neumožňuje penetraci, a proto jej lze použít pouze k modelování „bonded“ a „no separation“ kontaktu. Zaručená konvergence, lze použít přímý i iterační řešič.

Metoda Lagrangeových multiplikátorů spočívá v přidání nového členu k potenciální energii soustavy. Tento člen má tvar:

$$\begin{aligned} \Pi_c &= \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{d}^*, \\ \mathbf{d}^* &= \mathbf{R}\mathbf{d} - \mathbf{q}, \end{aligned} \quad 2.2$$

kde $\boldsymbol{\lambda}$ je vektor Lagrangeových multiplikátorů. Dosazením tohoto členu do celkové potenciální energie konečnoprvkového modelu se dostane po minimalizaci soustava rovnic [8]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{R}^T \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad 2.3$$

kde \mathbf{K} je matice tuhosti a \mathbf{f} vektor vnějších sil. Počet neznámých je tímto rozšířen o počet Lagrangeových multiplikátorů. Matice na levé straně rovnice je symetrická, ale singulární vlivem nulových členů na diagonále, a proto nelze použít iterační řešič. Formulaci lze použít na všechny typy kontaktů.

U metody pokutových členů má doplňkový člen potenciální energie tvar [8]:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \mathbf{d}^{*T} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{d}^*, \quad 2.4$$

kde $\boldsymbol{\alpha}$ je diagonální matice pokutových členů. Po dosazení a minimalizaci celkové potenciální energie se získá rovnice ve tvaru:

$$[\mathbf{K} + \mathbf{R}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{R}] \mathbf{d} = [\mathbf{f} + \mathbf{R}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{q}]. \quad 2.5$$

Z této rovnice je vidět, že tato formulace nenavýšuje počet neznámých. Tato metoda ve své podstatě spojuje kontaktní uzly imaginárními pružinami. Tato umělá tuhost se nazývá kontaktní tuhost. Při volbě dostatečně vysoké hodnoty tuhosti tato metoda konverguje k přibližnému řešení. Tuto formulaci lze použít pro všechny typy kontaktů a lze použít jak iterační, tak přímý řešič.

Poslední zmíněnou formulací je rozšířená Lagrangeova metoda. Tato metoda spojuje metodu pokutových členů a Lagrangeovu metodu. Doplňkový člen potenciální energie má tvar:

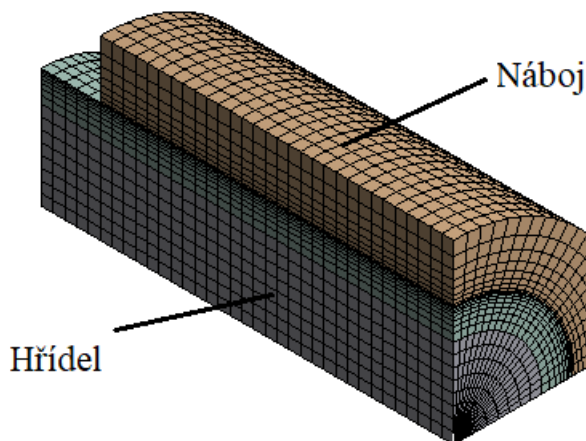
$$\Pi_a = \lambda^T \mathbf{d}^* + \frac{1}{2} \mathbf{d}^{*T} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{d}^*. \quad 2.6$$

Počet rovnic je navýšen o Lagrangeovy multiplikátory, ale výsledná matice není singulární a lze proto použít jak iterační, tak přímý řešič. Tato metoda je méně citlivá na správnou volbu kontaktní tuhosti než metoda pokutových členů. Lze použít pro všechny typy kontaktů.

Dále se tato kapitola člení do dvou částí. V první části budou testovány parametry kontaktů a v druhé části metody implementace předpětí do kontaktní úlohy.

2.1. Vliv parametrů kontaktů

Kontakt použitý pro testovací úlohu nalisovaného náboje na hřídeli je se třením implementován rozšířenou Lagrangeovou formulací. Vyšetřované parametry jsou normálová tuhost a penetrace, neboť mají na výsledky největší vliv. Penetrace udává hodnotu průniku kontaktních ploch a normálová tuhost udává tuhost mezi těmito plochami.



Obr. 11 – Síť konečných prvků testovací úlohy

Při řešení testovací úlohy bylo využito symetrie a byla modelována pouze osmina modelu Obr. 11. Byl uvažován shodný lineárně elastický materiál pro hřídel i náboj. Geometrické a materiálové parametry úlohy jsou:

- Vnitřní průměr – 20 mm
- Vnější průměr – 30 mm
- Délka hřídele – 70 mm
- Délka náboje – 60 mm
- Modul pružnosti materiálu v tahu – 200 GPa
- Poissonova konstanta – 0.3
- Hodnota přesahu – 0.1 mm

Statická analýza byla provedena pro různé hodnoty faktoru penetrace při zachování konstantního faktoru normálové tuhosti a vice versa. Výsledky provedených analýz jsou zobrazeny v Tab. 3. Z výsledků při snižování tolerance penetrace je vidět tendence konvergence k řešení, které lze považovat za exaktní. Stejnou tendenci lze pozorovat i při zvyšování normálové tuhosti. Při zvyšování tolerance penetrace je automaticky zvyšována normálová tuhost, ale při zvyšování normálové tuhosti tolerance penetrace neklesá, jak by se dalo očekávat, ale i přesto klesá výsledná hodnota penetrace.

Vyšší hodnoty normálové tuhosti snižují hodnoty penetrace a skluzu, resp. přesnější výsledky, ale mohou vést ke špatně podmíněným maticím a divergenci řešení [9].

| Faktor normálové tuhosti | Normálová tuhost | Faktor tolerance penetrace | Tolerance penetrace | Penetrace | Kontaktní tlak |
|--------------------------|------------------|----------------------------|---------------------|-----------|----------------|
| [-] | [MPa] | [-] | [-] | [mm] | [MPa] |
| 1 | 1.40E+07 | 0.1 | 2.55E-02 | 4.22E-03 | 580 |
| 1 | 1.40E+08 | 0.01 | 2.55E-03 | 4.39E-04 | 602 |
| 1 | 1.40E+09 | 0.001 | 2.55E-04 | 4.41E-05 | 603 |
| 1 | 1.40E+10 | 0.0001 | 2.55E-05 | 4.45E-06 | 606 |
| 10 | 1.40E+08 | 0.1 | 2.55E-02 | 4.39E-04 | 602 |
| 100 | 1.40E+09 | 0.1 | 2.55E-02 | 4.45E-05 | 606 |
| 1000 | 1.40E+10 | 0.1 | 2.55E-02 | 4.46E-06 | 607 |

Tab. 3 – Zkoumání vlivu normálové tuhosti a hodnot penetrace

2.2. Implementace předpětí do modální analýzy

Modální analýza je úloha lineární, a proto nelze zahrnout kontakty formulované v předchozí úloze přímo. Existují ale metody, které tyto kontakty linearizují, aby je bylo možno zahrnout do modální analýzy. V prostředí ANSYS existují tyto metody tři:

- „Use true status“ (použití skutečného stavu)
- „Force sticking“ (vynucené přichycení)
- „Force bonded“ (vynucené přilnutí)

Metoda „Use true status“ (UTS) zachovává stav kontaktu ze statické analýzy a pouze jej linearizuje pro použití v předepjaté modální analýze. Metoda „Force sticking“ (FS) využívá kontaktní tuhosti mezi tělesy, ale neumožňuje skluz kontaktních ploch, a proto nelze modelovat módy, kde nastává nezávislý pohyb těles v kontaktu. Metoda „Force bonded“ (FB) aplikuje kontakt „Bonded“ mezi uzly, které jsou ve statické analýze v kontaktu. Touto metodou nelze modelovat módy, kde nastává nezávislý pohyb dvou těles, viz [9].

V této úloze byly výše uvedené metody aplikovány na model z předchozí kapitoly. Výsledky těchto tří metod jsou porovnány s výsledky modelu bez přesahu, modelovaného jako jedno těleso, a jsou zobrazeny v Tab. 4. Z výsledků je vidět, že vliv předpětí v tomto konkrétním příkladu roste s vyššími frekvencemi. Výsledky metod „Force bonded“ a „Force sticking“ jsou v tomto případě shodné, neboť nedochází ke skluzu. Obecně lze pozorovat, že kontakt s předpětím snižuje vlastní frekvence a konkrétně metoda „Use true status“ tento fenomén popisuje nejspolehlivěji.

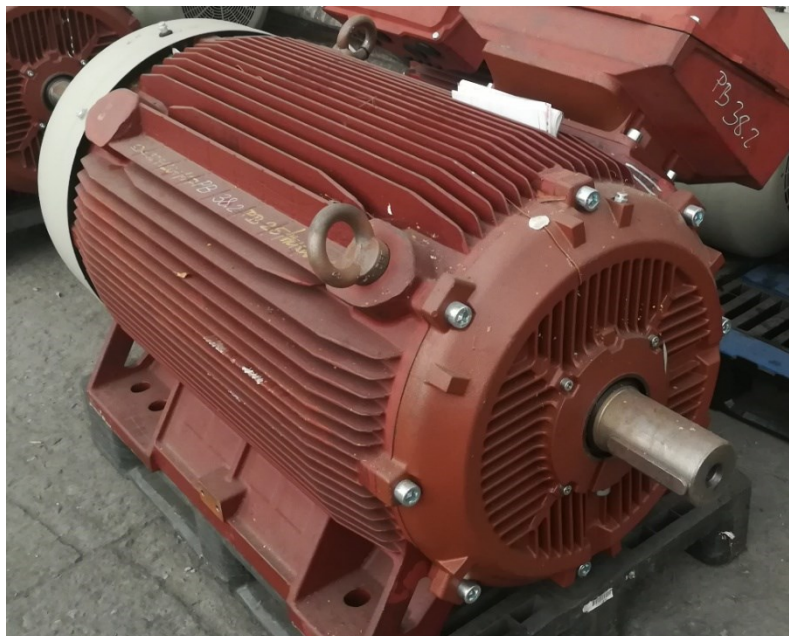
| | | UTS | | FS | | FB | |
|---------------------|-------------------------------------|-------------------|--------------|-------------------|--------------|-------------------|--------------|
| Pořadí frekvence | Frekvence bez přesahu [Hz] | Frekvence [Hz] | Chyba [%] | Frekvence [Hz] | Chyba [%] | Frekvence [Hz] | Chyba [%] |
| 1 | 22837 | 22415 | 1.85 | 22768 | 0.30 | 22768 | 0.30 |
| 2 | 22837 | 22415 | 1.85 | 22768 | 0.30 | 22768 | 0.30 |
| 3 | 38390 | 38265 | 0.33 | 38340 | 0.13 | 38340 | 0.13 |
| 4 | 50179 | 49648 | 1.06 | 49984 | 0.39 | 49984 | 0.39 |
| 5 | 65060 | 61688 | 5.18 | 64255 | 1.24 | 64255 | 1.24 |
| 6 | 65060 | 61688 | 5.18 | 64255 | 1.24 | 64255 | 1.24 |
| 7 | 76019 | 71429 | 6.04 | 74751 | 1.67 | 74751 | 1.67 |
| 8 | 76019 | 71429 | 6.04 | 74751 | 1.67 | 74751 | 1.67 |
| 9 | 81799 | 75776 | 7.36 | 80141 | 2.03 | 80141 | 2.03 |
| 10 | 81799 | 75776 | 7.36 | 80141 | 2.03 | 80141 | 2.03 |

Tab. 4 – Porovnání výsledků pro různé implementace předpětí

Metoda „Use true status“ je i přes vyšší výpočetní náročnost oproti ostatním metodám nejvhodnější k implementaci předpětí do modální analýzy, neboť nejspolehlivěji popisuje interakci mezi tělesy v kontaktu.

3. Výpočet vlastních frekvencí rotoru

Zkoumaný rotor je součástí 2-pólového asynchronního elektromotoru společnosti Siemens, s.r.o. zobrazeného na Obr. 12. Parametry daného elektromotoru jsou uvedeny v Tab. 5.



Obr. 12 – Zkoumaný elektromotor

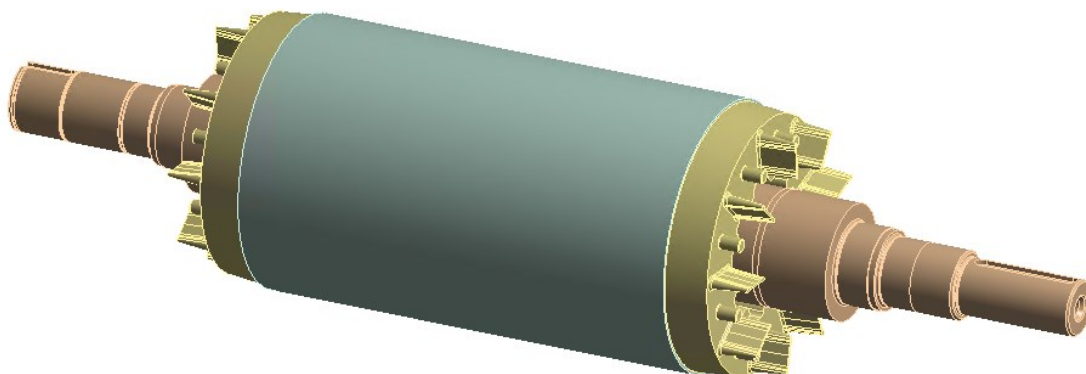
| | A | B | C | E | G | I | L | M | M |
|------------------------------|------------|------|----------|----------|----------|----------|----------|------|----------|
| Napájecí napětí [V] | 400 | 690 | 460 | 440 | 460 | 380 | 660 | 415 | 415 |
| Zapojení svorkovnice | Δ^1 | Y | Δ | Δ | Δ | Δ | Δ | Y | Δ |
| Napájecí proud [A] | 550 | 315 | 530 | 485 | 455 | 475 | 560 | 325 | 540 |
| Výkon [kW] | 315 | 325 | 355 | 315 | 300 | 315 | 315 | 315 | 315 |
| Účinník [-] | 0.87 | 0.87 | 0.88 | 0.89 | 0.86 | 0.87 | 0.89 | 0.89 | 0.84 |
| Otáčky [min^{-1}] | 2988 | 2988 | 3586 | 3588 | 3590 | 3588 | 2986 | 2986 | 2988 |
| Napájecí frekvence [Hz] | 50 | 50 | 60 | 60 | 60 | 60 | 50 | 50 | 50 |
| Účinnost [%] | 95.8 | 95.8 | 95.8 | 95.8 | 95.8 | 95.8 | 95.8 | 95.8 | 95.8 |
| Třída účinnosti | IE3 | IE3 | IE3 | IE3 | IE3 | IE3 | IE3 | IE3 | IE3 |

Tab. 5 – Parametry elektromotoru

¹ Δ značí zapojení do trojúhelníka, a Y značí zapojení do hvězdy.

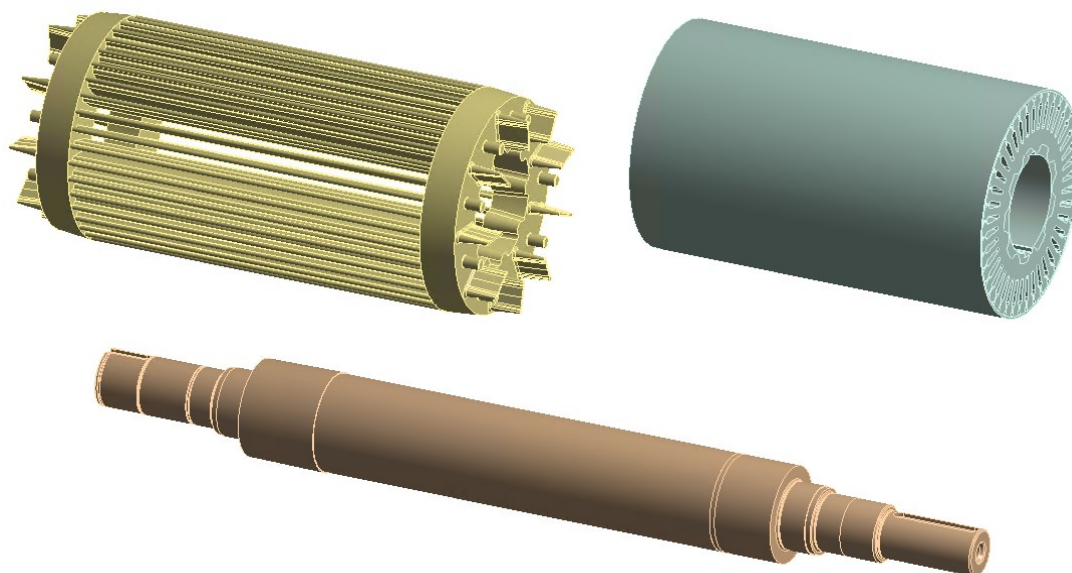
3.1. Model rotoru

V této práci je analyzován rotor elektromotoru, jehož geometrie je zobrazena na Obr. 13. Jedná se o rotor s kotvou nakrátko. Rotorový svazek se skládá ze svazku plechů oddělených izolací a hliníkové klece odlité tlakovým litím. Rotorový svazek je na hřídeli nalisován. Dílčí součásti jsou zvlášť vykresleny na Obr. 14.



Obr. 13 – Geometrie rotoru

Základní materiálové parametry dílčích částí rotoru potřebné k modální analýze jsou uvedeny v Tab. 6. Všechny části rotoru jsou v prvotní analýze považovány za izotropní.



Obr. 14 – Rotorová klec (vlevo), plechy rotorového svazku (vpravo), hřídel (dole)

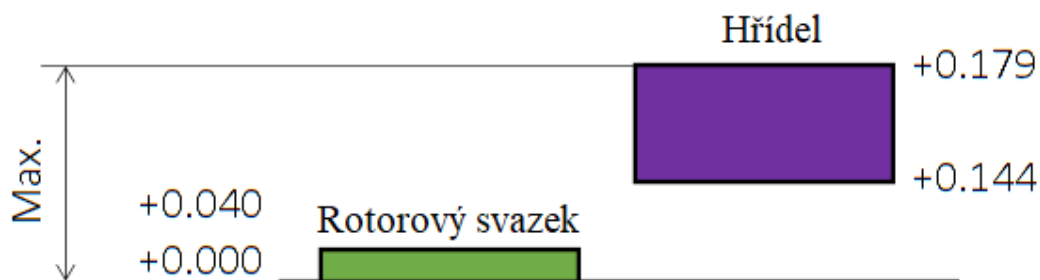
| | Materiál | Modul pružnosti | Poissonova konstanta | Hustota | Hmotnost |
|--------------------------|-----------------|------------------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------|
| | DIN | [GPa] | [-] | [kg·m ⁻³] | [kg] |
| Hřídel | 1.0060 | 190 | 0.29 | 7850 | 108.9 |
| Plechý rotorového svazku | 1.083 | 210 | 0.3 | 7850 | 205.1 |
| Rotorová klec | 3.0255 | 68 | 0.33 | 2700 | 34.0 |
| Celkem | - | - | - | - | 348.0 |

Tab. 6 – Materiálové parametry rotoru

Výpočet vlastních frekvencí a tvarů rotoru bude následně proveden pro různé konfigurace modelu tak, aby bylo umožněno porovnání dílčích výrobních, technologických a výpočetních parametrů na výsledky modální analýzy.

3.2. Vliv přesahu

Jedním ze základních výrobních parametrů je přesah při nalisování rotorového svazku na hřídel. Tolerance přesahu pro vnější průměr hřídele a vnitřní průměr rotorového svazku je zobrazen na Obr. 15.



Obr. 15 – Tolerance přesahu

Maximální přesah je při největším průměru hřídele a nejmenším průměru svazku:

$$p_{max} = 0.179 - 0 = 0.179 \text{ mm.} \quad 3.1$$

Minimální přesah se vypočte z opačných extrémů:

$$p_{min} = 0.144 - 0.040 = 0.104 \text{ mm.} \quad 3.2$$

Nakonec lze z těchto krajních hodnot vypočíst střední hodnotu přesahu:

$$p_{mean} = \frac{p_{min} + p_{max}}{2} = \frac{0.179 + 0.104}{2} = 0.141 \text{ mm.} \quad 3.3$$

Modální analýza je provedena nejprve bez předpětí, následně s předpětím s využitím implementace UTC pro 3 varianty přesahu (min, max, mean), a nakonec je provedena analýza s implementací FS pro střední přesah. Výpočetní síť pro model s přesahem je na Obr. 16.



Obr. 16 – Výpočetní síť modelu

Metoda síťování byla nastavena na automatickou s tetraedrickými kvadratickými elementy. Velikost elementu je zadána 5 mm se zjemněním sítě v místě kontaktu na 2 mm. Parametry diskretizovaného modelu spolu s výpočetní náročností jsou pro představu uvedeny v Tab. 7.

| Konfigurace | TCS, min | TCS, mean | TCS, max | FS, mean |
|---------------------------------|------------|------------|------------|------------|
| počet uzlů | 20 928 031 | 20 959 758 | 20 933 653 | 20 959 758 |
| počet elementů | 15 680 778 | 15 706 210 | 15 684 491 | 15 706 210 |
| počet rovnic | 62 784 093 | 62 879 274 | 62 800 959 | 62 879 274 |
| Výpočetní čas – statika | 5.1 h | 5.0 h | 5.5 h | 5.0 |
| Výpočetní čas – modální analýza | 18.5 h | 15.1 h | 17.8 h | 14.9 h |

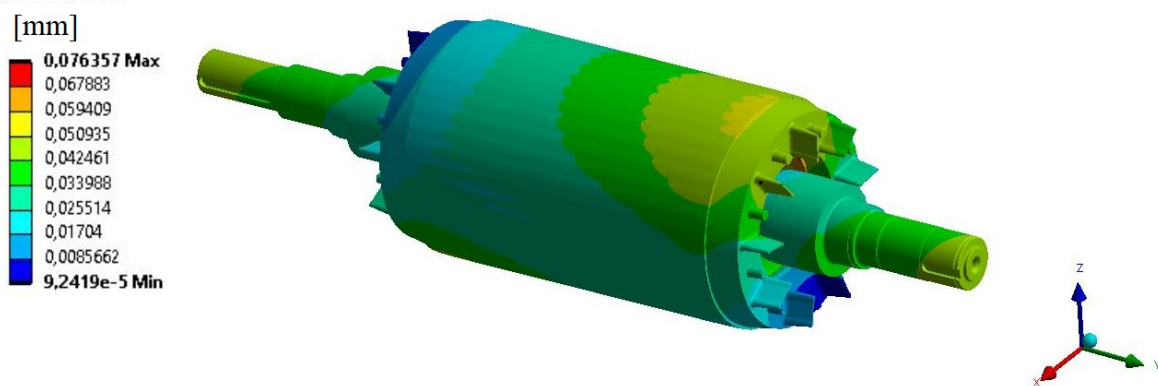
Tab. 7 – Parametry výpočtového modelu

Kontakt mezi hřídelí a rotorovým svazkem je třecí s rozšířenou Lagrangeovou formulací. Jedná se o modální analýzu volného tělesa, kde jsou okrajové podmínky tvořeny pouze kontakty. Výsledné hodnoty prvních 15 vlastních frekvencí jsou pro různé konfigurace vypsány v Tab. 8.

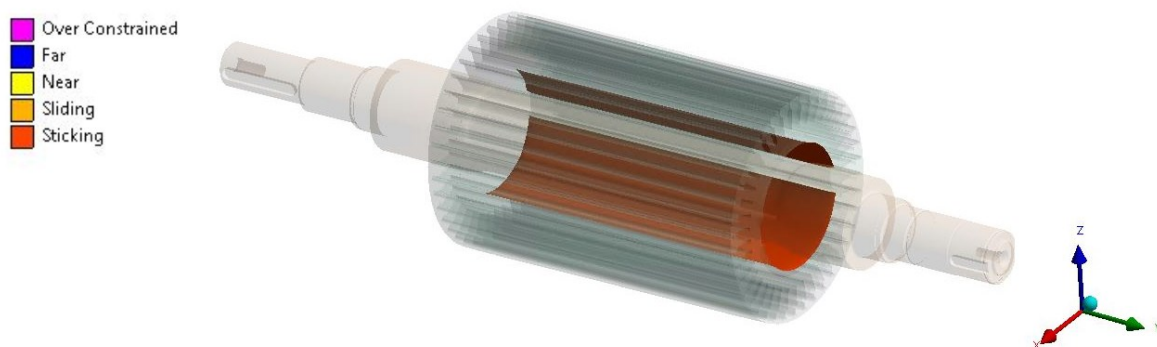
| Pořadí frekvence | Vlastní frekvence [Hz] | | | | |
|---------------------|------------------------|----------|-----------|----------|----------|
| | Bez předpětí | TCS, min | TCS, mean | TCS, max | FS, mean |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0.021 | 0.021 | 0.021 | 0 |
| 4 | 0 | 0.021 | 0.021 | 0.021 | 1.072 |
| 5 | 0 | 0.021 | 0.021 | 0.021 | 1.074 |
| 6 | 0 | 0.150 | 0.191 | 0.260 | 2.930 |
| 7 | 669.38 | 642.74 | 643.79 | 645.38 | 666.48 |
| 8 | 674.65 | 648.77 | 649.11 | 649.95 | 671.61 |
| 9 | 907.50 | 867.75 | 868.93 | 870.83 | 899.43 |
| 10 | 913.22 | 874.55 | 874.79 | 875.65 | 905.01 |
| 11 | 1789.30 | 1701.15 | 1704.28 | 1709.07 | 1780.4 |
| 12 | 1814.10 | 1727.63 | 1728.60 | 1731.09 | 1804.9 |
| 13 | 2533.90 | 2407.92 | 2411.58 | 2417.58 | 2515.3 |
| 14 | 2544.70 | 2433.10 | 2433.87 | 2436.51 | 2535.7 |
| 15 | 2554.40 | 2522.92 | 2523.60 | 2524.89 | 2542.6 |

Tab. 8 – Vlastní frekvence pro různé konfigurace přesahu

Jelikož se jedná o kmitání volného tělesa je dle očekávání prvních 6 vlastních frekvencí nulových, či blízkých nule. Z výsledků pro TCS je patrné, že při změně hodnoty přesahu se hodnoty vlastních frekvencí liší o méně než 1 %. Při použití implementace FS je patrná tuhost kontaktu a vliv přesahu je zanedbatelný, neboť se hodnoty vlastních frekvencí blíží hodnotám simulace rotoru modelovaného jako jedno těleso bez předpětí.



Obr. 17 – Hodnoty posuvů statické analýzy (mean)



Obr. 18 – Status kontaktu statické analýzy (mean)

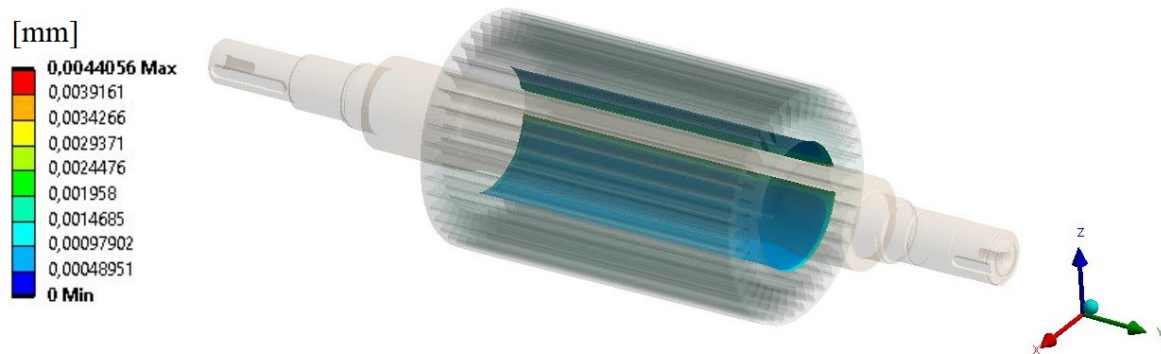
Pro ilustrace jsou zde uvedeny výsledky statické analýzy předpětí pro střední přesah (mean). Na Obr. 17 jsou zobrazeny hodnoty posuvu. Dále na Obr. 18 je uveden status kontaktních ploch, ze kterého lze pozorovat, že kontaktní plochy jsou ve všech místech v dotyku a nedochází ke skluzu. Obr. 19 uvádí hodnoty penetrace kontaktních ploch. Největší hodnota penetrace nabývá hodnoty 0.004 mm, a to pouze v oblastech ostrých hran okrajů kontaktních ploch. Nakonec jsou zobrazeny hodnoty kontaktního tlaku, viz Obr. 20. Maximální hodnoty dosahují nereálných hodnot vlivem ostrých hran. Průměrná hodnota tlaku mimo okraje dosahuje hodnot okolo 82 MPa. Jedná se o předpokládanou hodnotu, neboť ji lze přibližně vypočítat s využitím teorie tlustostěnných nádob a podobnosti úlohy s úlohou nalisování náboje na hřídeli. Kontaktní tlak lze v daném případě vypočítat dle vztahu [11]:

$$p = \frac{\Delta r_1}{r_1 \left(\frac{\mu_1 - 1}{E_1} - \frac{r_1^2(\mu_2 - 1)}{E_2(r_1^2 - r_2^2)} + \frac{r_2(\mu_2 + 1)}{E_2(r_1^2 - r_2^2)} \right)}, \quad 3.4$$

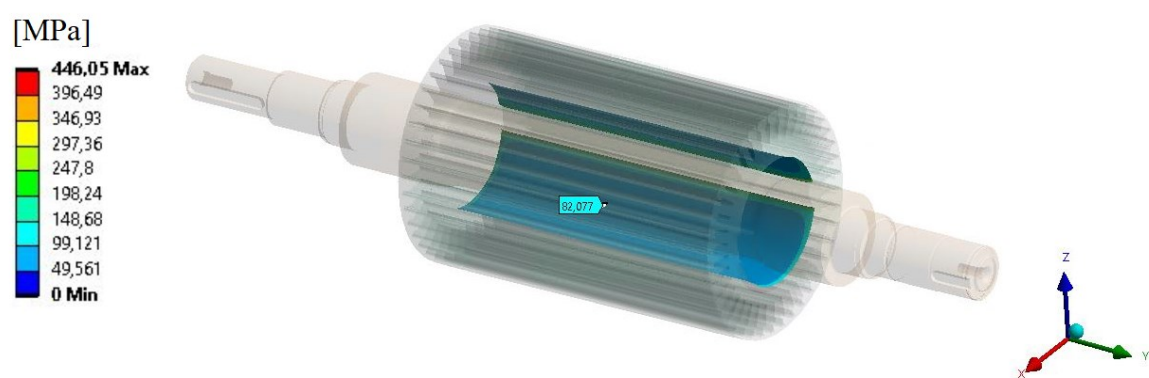
kde Δr_1 je přesah, r_1 poloměr hřídele, r_2 poloměr náboje E_1 modul pružnosti hřídele, E_2 modul pružnosti náboje, μ_1 Poissonova konstanta hřídele, a μ_2 Poissonova konstanta náboje. Materiálové parametry jsou uvedeny v Tab. 6. Poloměr hřídele je 67.5 mm a poloměr náboje je 157.5 mm. Po dosazení do vztahu 3.4 získáme teoretickou hodnotu kontaktního tlaku:

$$p = -82.9 \text{ MPa}. \quad 3.5$$

Rozdíl menší než 1 MPa mezi výsledky teoretického odhadu a vypočítanými hodnotami dokládá, že kontaktní rozhraní mezi hřídelem a rotorovým svazkem je modelováno s dostatečnou přesností.



Obr. 19 – Hodnoty penetrace statické analýzy (mean)

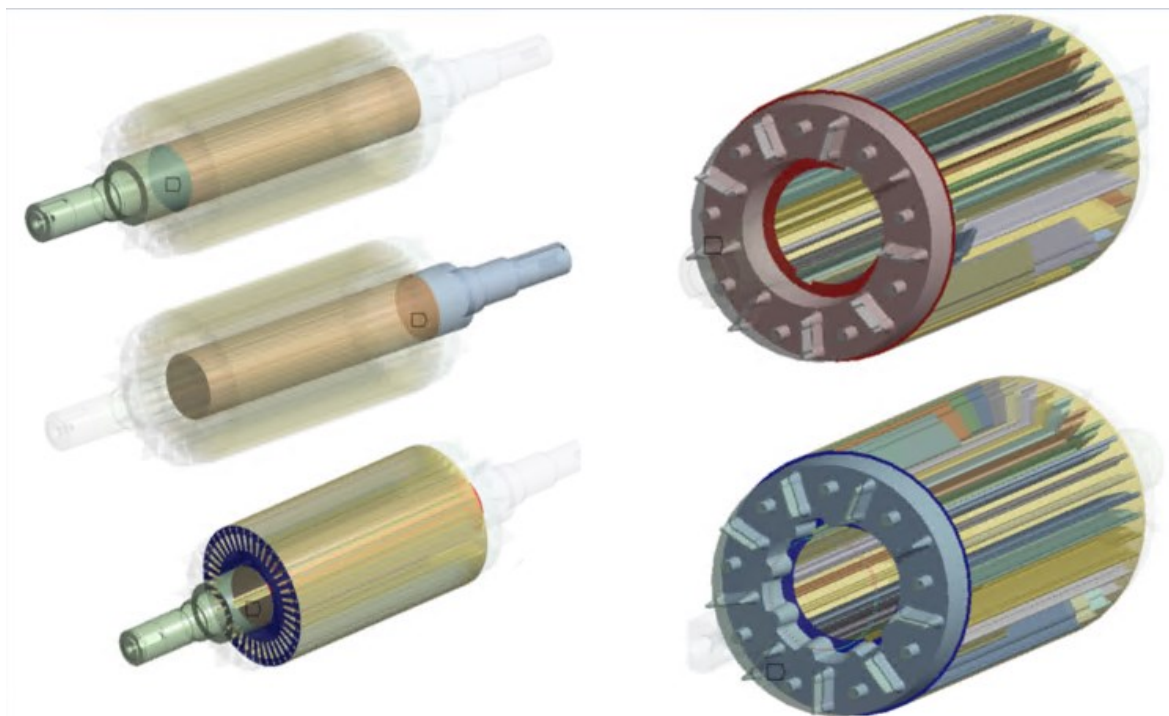


Obr. 20 – Hodnoty kontaktního tlaku statické analýzy (mean)

3.3. Vliv spojení sítě

Tento vliv se neřadí mezi výrobní, ani technologické parametry, ale je ryze výpočetní povahy. Sít' modelu může být obecně spojena pomocí sdílené topologie, kdy jsou uzly na hranici společné oběma geometriím, nebo pomocí kontaktu, kdy má každá geometrie v oblasti spojení své uzly, které jsou vzájemně spojeny pomocí vazebních rovnic (kontaktu). Výhodou spojení geometrie pomocí kontaktu je možnost rozdělení tělesa na části a tvorba sítě dílčí části nezávislé na částech ostatních.

Rozdělení sítě pro analýzu vlivu je patrné z Obr. 21. Hřídel byla rozdělena na tři části, neboť střední část je oblast kontaktu a nároky na kvalitu sítě jsou v této oblasti výrazně vyšší než na zbytku hřídele. Dále je rozdělena sít' na rozhraní rotorových plechů a rotorové klece z důvodu komplexní geometrie rotorových tyčí a z nich vyplývající geometrie rotorových plechů.



Obr. 21 – Rozdělení sítě

Analýza byla provedena na modelu bez předpětí z důvodu rychlosti výpočtu. Byly analyzovány dvě kvality sítě pro model se sdílenou topologií a následně dvě varianty spojení kontaktem „bonded“ pro shodnou kvalitu sítě a formulací kontaktu pomocí MPC a rozšířenou Lagrangeovou formulací (RL). Porovnání prvních patnácti vlastních frekvencí je uvedeno v Tab. 9.

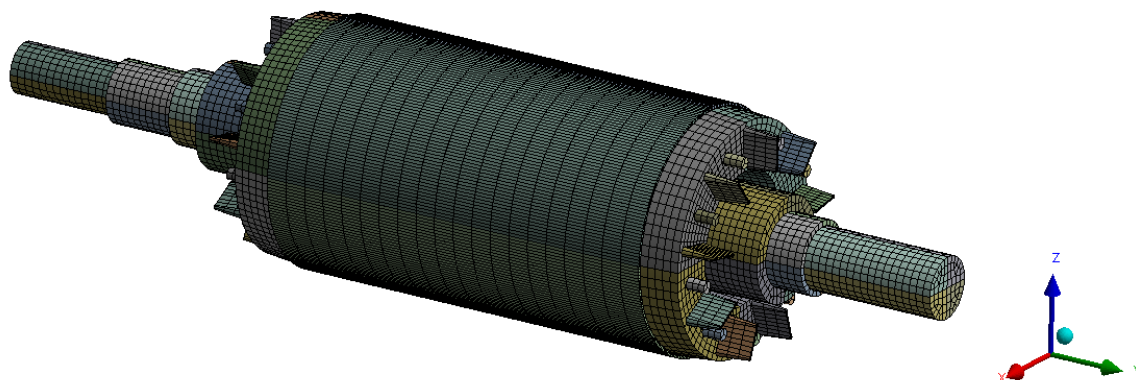
Při použití sdílené topologie se zvětšení velikosti elementu z 5 mm na 10 mm projeví až při vyšších frekvencích, ale nijak výrazně a chyba je vždy menší než 0.2 %. Obdobně je tomu u použití kontaktu „bonded“ formulovaného jako MPC, nebo RL. Z výsledku tedy

vyplývá, že spojení sítě pomocí kontaktů zanedbatelně ovlivňuje výsledky modální analýzy pro tento konkrétní případ.

| Pořadí frekvence | Vlastní frekvence [Hz] | | | |
|----------------------|------------------------|---------|------------------|------------|
| | Sdílená topologie | | „Bonded“ kontakt | |
| Velikost elementu | 5 mm | 10 mm | 10 mm – MPC | 10 mm – RL |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 3.61 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 16.03 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 43.95 |
| 7 | 669.38 | 670.68 | 670.00 | 669.97 |
| 8 | 674.65 | 675.69 | 674.33 | 674.61 |
| 9 | 907.50 | 909.27 | 907.81 | 907.63 |
| 10 | 913.22 | 914.56 | 912.61 | 911.96 |
| 11 | 1789.30 | 1792.11 | 1790.92 | 1790.65 |
| 12 | 1814.10 | 1816.20 | 1812.61 | 1813.47 |
| 13 | 2533.90 | 2536.51 | 2534.31 | 2533.48 |
| 14 | 2544.70 | 2546.90 | 2546.08 | 2545.48 |
| 15 | 2554.70 | 2556.20 | 2552.22 | 2550.92 |

Tab. 9 – Vliv spojení sítě

Následně byl vytvořen zjednodušený model (viz Obr. 22) tvořený 1 609 526 uzly a 352 065 elementy při zachování tuhosti, hmotnosti a rozložení hmotnosti rotoru. Tento zjednodušený model je použit ve všech následujících analýzách.



Obr. 22 – Zjednodušený model

3.4. Naměřená data volného kmitání – ve společnosti Siemens, s.r.o.

Ve společnosti Siemens, s.r.o. bylo provedeno laboratorní měření vlastních frekvencí a tvarů analyzovaného rotoru. Uložení rotoru při měření je zobrazeno na Obr. 23. Rotor byl zavěšen na lanech uchycených na rotorových tyčích vně svazku. Tato konfigurace měření umožňuje naměření vlastních frekvencí a tvarů kmitání rotoru.



Obr. 23 – Uložení rotoru při měření

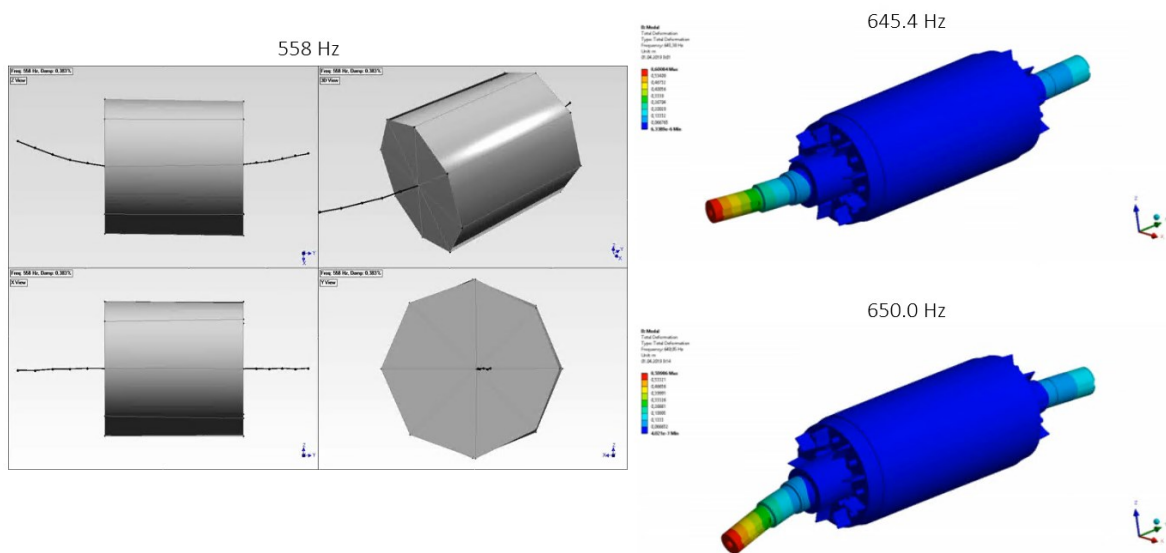
Z analýzy vlastních tvarů vyplývá, že frekvence 7.–14. odpovídají ohybovému kmitání a 15. odpovídá kmitání krouživému. Vzhledem k symetrii soustavy je každý ohybový mód vypočten dvakrát, a to jako shodné kmitání ve dvou navzájem kolmých rovinách. Pro porovnání s vypočtenými hodnotami je proto vhodné dvě frekvence popisující shodný ohybový mód zprůměrovat:

$$f_{o,stř} = \frac{f_{o,a} + f_{o,b}}{2}, \quad 3.6$$

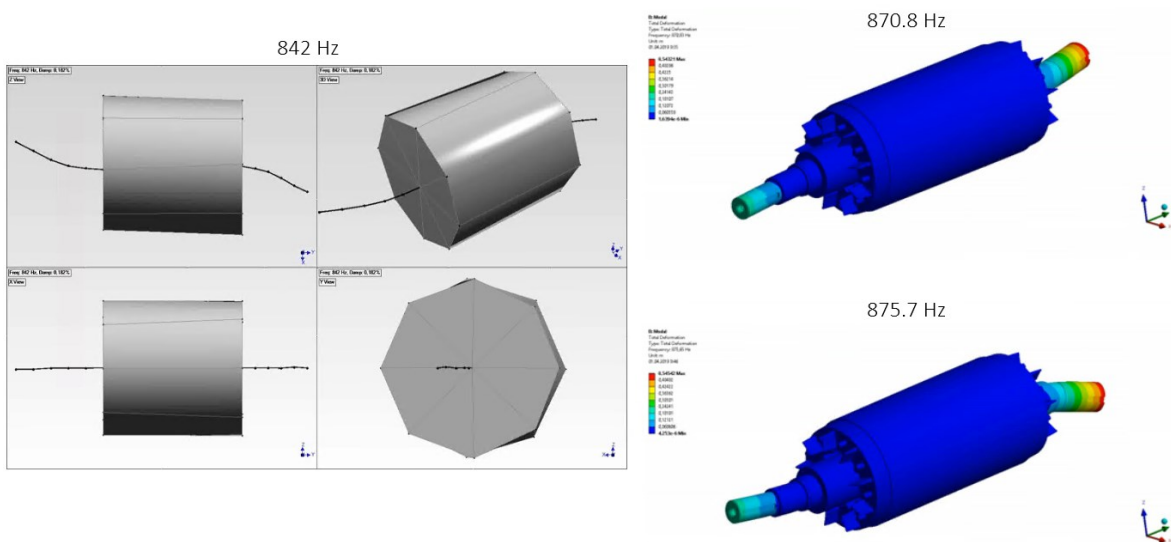
kde $f_{o,a}$ je první vypočtená frekvence a $f_{o,b}$ je druhá vypočtená frekvence shodného módu. Porovnání vypočtených a naměřených hodnot je uvedeno v Tab. 10. Porovnání naměřených a vypočítaných vlastních tvarů je zobrazeno postupně na Obr. 24, Obr. 25, Obr. 26, Obr. 27 a Obr. 28. Z analýzy vlastních tvarů bylo zjištěno, že mezi patnácti vypočítanými vlastními tvary žádný neodpovídá pátému naměřenému ohybovému vlastnímu tvaru.

| Pořadí frekvence | Vlastní frekvence [Hz] | | | Chyba |
|---------------------|------------------------|----------|---------------------|-------|
| | Měření | TCS, max | TCS, max, $f_{stř}$ | [%] |
| 7 | 558 | 645.38 | 647.7 | 16.1 |
| 8 | | 649.95 | | |
| 9 | 842 | 870.83 | 873.2 | 3.8 |
| 10 | | 875.65 | | |
| 11 | 1220 | 1709.07 | 1720.1 | 41.0 |
| 12 | | 1731.09 | | |
| 13 | 1780 | 2417.58 | 2427.1 | 16.4 |
| 14 | | 2436.51 | | |
| 15 | 2120 | 2524.89 | | |

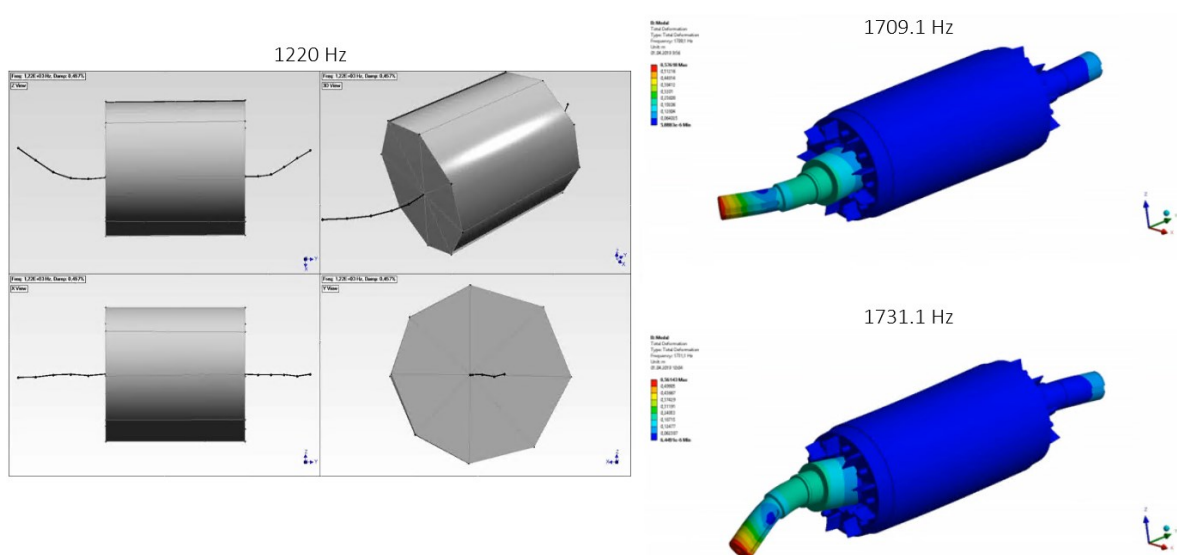
Tab. 10 – Porovnání naměřených vlastních frekvencí s vypočítanými



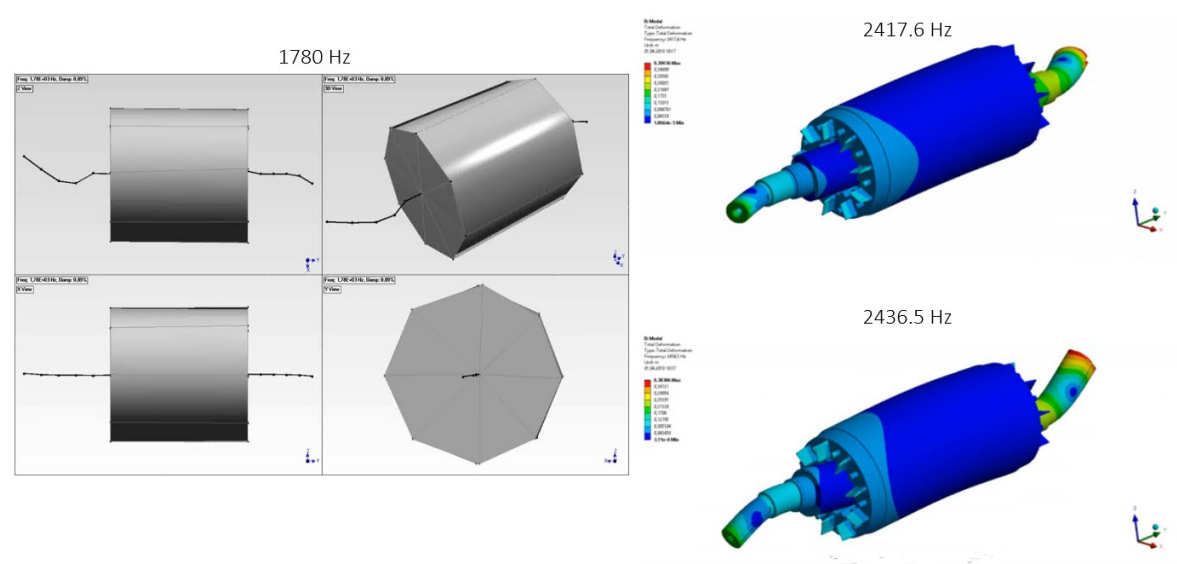
Obr. 25 – První nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané – vpravo)



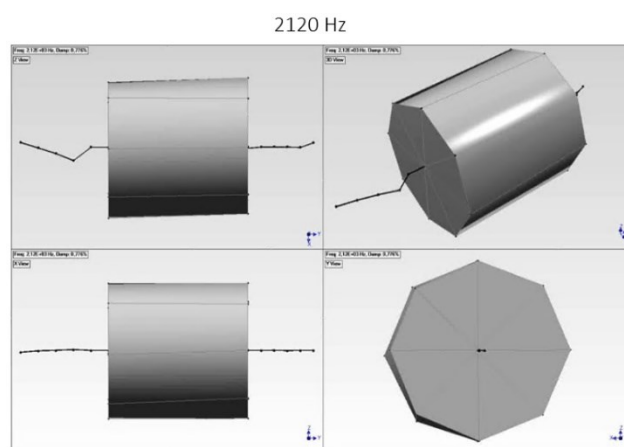
Obr. 24 – Druhý nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané – vpravo)



Obr. 26 – Třetí nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané – vpravo)



Obr. 27 – Čtvrtý nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané – vpravo)



Obr. 28 – Pátý nenulový naměřený vlastní tvar

3.5. Vliv modulu pružnosti rotorového paketu

Z hlediska mechanické funkce motoru jsou nejdůležitější 1. a 2. vlastní frekvence. Mezi prvními dvěma naměřenými a vypočtenými vlastními frekvencemi byly zjištěny rozdíly. V případě první vlastní frekvence je relativní chyba rovna 16.1 % a u druhé je 3.8 %.

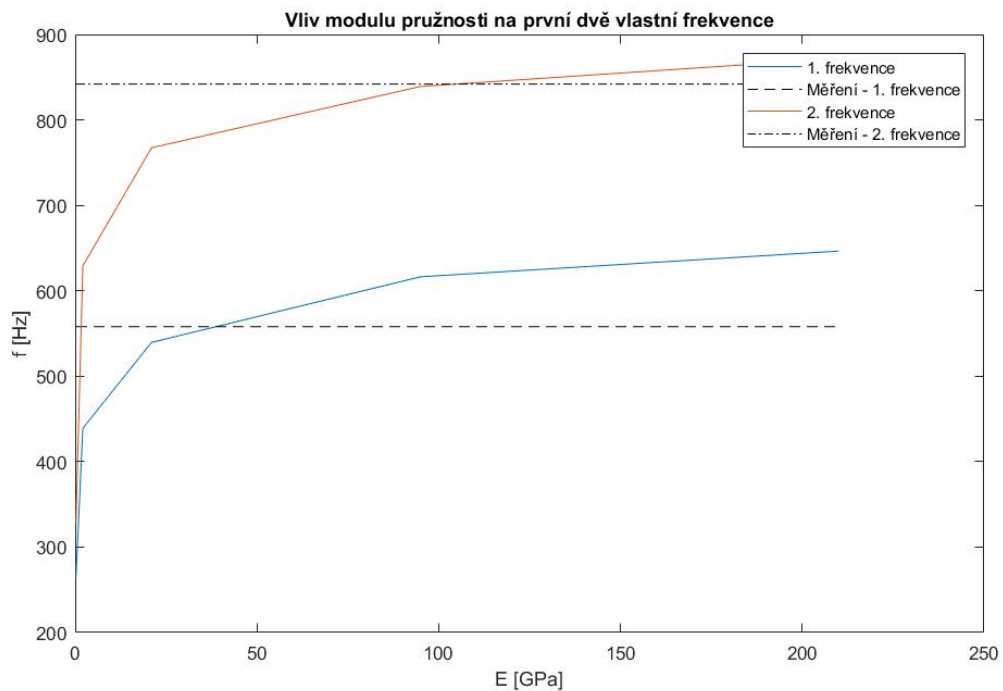
V dosavadních výpočtech bylo uvažováno, že rotorový paket je homogenní izotropní těleso s materiálovými vlastnostmi oceli plechů. Vlivem modulu pružnosti na první vlastní frekvenci se zabývá práce [12]. Obdobná analýza je provedena i v této práci, kde jsou pozorovány změny vlastní frekvence v závislosti na změně modulu pružnosti rotorového paketu plechů.

| Pořadí frekvence | Vlastní frekvence [Hz] | | | | | |
|---------------------|------------------------|---------------|----------|-----------|----------|----------|
| | Měření | TCS, mean, E: | | | | |
| | | 210 GPa | 0.21 GPa | 2.10 GPa | 21.0 GPa | 95 GPa |
| 7 | 558 / O1 | 643.8/O1 | 164.1/K1 | 437.8/O1 | 537.6/O1 | 613.8/O1 |
| 8 | | 649.1/O1 | 261.1/O1 | 440.5 /O1 | 541.6/O1 | 618.9/O1 |
| 9 | 842 / O2 | 868.9/O2 | 267.8/O1 | 460.5/K1 | 764.9/O2 | 836.3/O2 |
| 10 | | 874.8/O2 | 273.3/K2 | 624.0/O2 | 769.8/O2 | 842.0/O2 |
| 11 | 1220 / O3 | 1704/O3 | 317.9/A1 | 634.2/O2 | 1158/K1 | 1558/O3 |
| 12 | | 1728/O3 | 326.3/O2 | 793.6/O3 | 1275/O3 | 1574/O3 |
| 13 | 1780 / O4 | 2412/O4 | 328.4/O2 | 800.9/K2 | 1280/O3 | 1971/K1 |
| 14 | | 2434/O4 | 349.0/O3 | 803.5/O3 | 1722/O4 | 2110/ O4 |
| 15 | 2120 / K1 | 2524/K1 | 354.8/O3 | 910.5/O4 | 1742/O4 | 2127/O4 |

Tab. 11 – Vliv modulu pružnosti paketu (typ vlastního tvaru odpovídající frekvence: O – ohybové, K – krouivé, A – axiální kmitání)

Výsledky vlivu modulu pružnosti na hodnoty vlastních frekvencí jsou v Tab. 11. Vlastní módy kmitání při nižších hodnotách modulu pružnosti neodpovídají pořadí při měření, a proto je každá frekvence doplněna o typ kmitání (O, K, A) včetně pořadí. Pro přehlednost je uvedena závislost první a druhé zprůměrované ohybové vlastní frekvence na modulu pružnosti Obr. 29.

Z vykreslení závislosti prvních dvou vlastních frekvencí na modulu pružnosti lze pozorovat strmý nárůst vlastních frekvencí v oblasti od 0.21 do 21 GPa, a poté stoupá již výrazně pomaleji. Dále lze pozorovat, že při modulu pružnosti mezi 20 a 50 GPa lze získat vypočtenou hodnotu první vlastní frekvence shodnou s měřením, a při hodnotě okolo 100 GPa odpovídá vypočtená hodnota druhé vlastní frekvence hodnotě naměřené. Z výsledků vyplývá, že modul pružnosti rotorového paketu má velký vliv na výsledné hodnoty vlastních frekvencí a dále, že změnou hodnoty modulu pružnosti paketu nelze dosáhnout přesné shody výpočtu s měřením na prvních dvou frekvencích.



Obr. 29 – Vliv modulu pružnosti rotorového svazku na první dvě ohybové frekvence

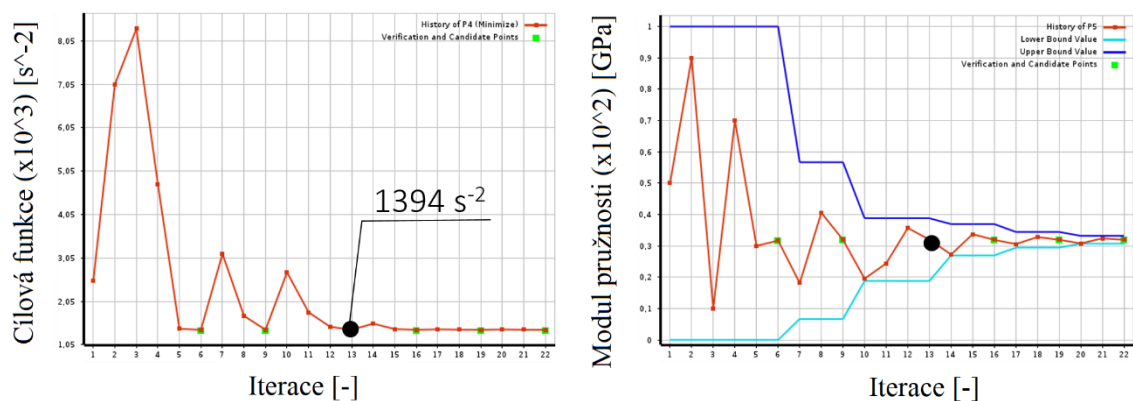
3.6. Optimalizace materiálových parametrů rotorového paketu

Optimalizace je provedena za předpokladu rotorového paketu modelovaného jako izotropní těleso bez přesahu mezi rotorovým svazkem a hřídelí. Nejprve je uvažován proměnný modul pružnosti rotorového paketu a cílová funkce má tvar:

$$F(E) = (f_7 - 558[\text{Hz}])^2 + (f_9 - 842[\text{Hz}])^2, \quad 3.7$$

kde F je cílová funkce, a f_i značí pořadí frekvence (7. a 8. odpovídají první ohybové frekvenci, 9. a 10. odpovídají 2. ohybové frekvenci). Cílem optimalizace je minimalizace cílové funkce. Výsledky optimalizace jsou graficky zobrazeny na Obr. 30.

Následně bylo uvažováno jak s proměnným modulem pružnosti, tak i Poissonovou konstantou. V tomto případě má cílová funkce k minimalizaci tvar:



Obr. 30 – Výsledky optimalizace pro proměnný modul pružnosti

$$F(E, \mu) = \left(\frac{f_7 + f_8}{2} - 558[\text{Hz}] \right)^2 + \left(\frac{f_9 + f_{10}}{2} - 842[\text{Hz}] \right)^2. \quad 3.8$$

Průběh této optimalizace je na Obr. 31. Nakonec je provedena optimalizace navíc i s proměnnou hustotou rotorového paketu. Cílová funkce má pak tvar:

$$F(E, \mu, \rho) = \left(\frac{f_7 + f_8}{2} - 558[\text{Hz}] \right)^2 + \left(\frac{f_9 + f_{10}}{2} - 842[\text{Hz}] \right)^2. \quad 3.9$$

Průběh optimalizace s třemi proměnnými parametry je zobrazen na Obr. 32. Vypočtené hodnoty provedených optimalizací jsou uvedeny v Tab. 12.

| Proměnné | Pořadí optimalizace | $F [\text{s}^{-2}]$ | $E [\text{GPa}]$ | $\mu [-]$ | $\rho [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$ |
|----------------|---------------------|---------------------|------------------|-----------|--|
| E | 1 | 1394 | 31.98 | 0.3 | 7850 |
| E, μ | 2 | 1371 | 29.43 | 0.309 | 7850 |
| E, μ, ρ | 3 | 1274 | 27.79 | 0.389 | 7505 |

Tab. 12 – Vypočtené parametry pomocí optimalizace

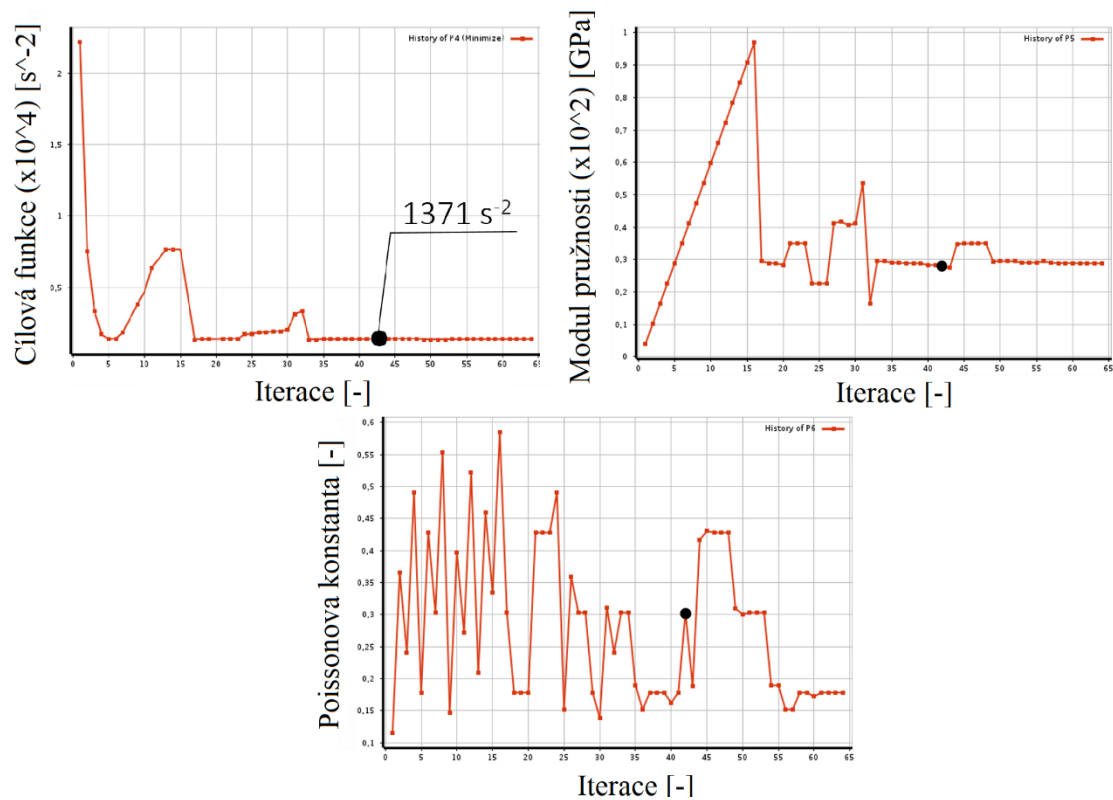
Vypočtené první dvě zprůměrované ohybové vlastní frekvence z optimalizace jsou porovnány s naměřenými v Tab. 13.

| | $f_1 [\text{Hz}]$ | Chyba [%] | $f_2 [\text{Hz}]$ | Chyba [%] |
|----------------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|
| Naměřená data | 558 | - | 842 | - |
| Optimalizace 1 | 584 | 4.7 | 815 | -3.2 |
| Optimalizace 2 | 582 | 4.3 | 811.9 | -3.6 |
| Optimalizace 3 | 579.5 | 3.9 | 813.5 | -3.4 |

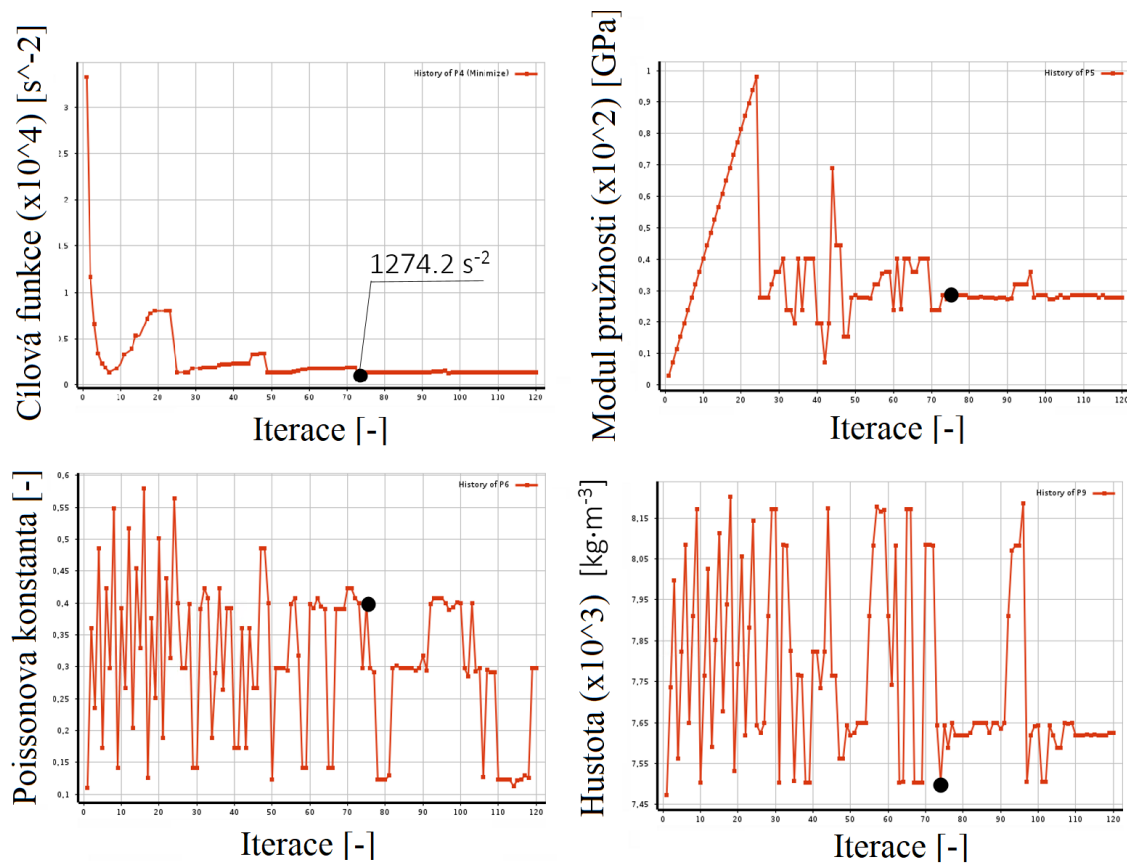
Tab. 13 – Porovnání prvních dvou vlastních frekvencí z optimalizace s naměřenými

Vypočtené hodnoty vlastních frekvencí z optimalizace se liší od naměřených hodnot do 5 %, a při uvažování i proměnné hodnoty hustoty rotorového paketu poklesla chyba pod 4 %. I přes velkou shodu výsledků, nelze předpokládat, že vypočtené hodnoty jsou reálné. Pro získání výsledků bylo potřeba zanedbat přesah mezi hřídelem a rotorovým svazkem a uvažovat rotorový svazek jako izotropní, neboť v opačném případě by výpočetní čas úlohy exponenciálně vzrostl.

Tato kapitola názorně předvedla možnosti i omezení metody optimalizace při kalibraci výpočetních modelů. I přes strmý nárůst výkonu výpočetní techniky nelze dosud provádět optimalizace robustních modelů v přijatelném čase na běžných výkonných počítačích. Přesto však lze při využití zjednodušených modelů získat informace o vlivu dílčích parametrů, či zjistit přibližnou hodnotu hledaného parametru.



Obr. 31 – Průběh optimalizace pro proměnný modul pružnosti a Poissonovu konstantu



Obr. 32 – Průběh optimalizace pro 3 proměnné parametry

3.7. Vliv stažení rotorového paketu

Jedním z výrobních parametrů ovlivňující modální vlastnosti je stažení rotorového paketu po odlití a vychladnutí rotorové klece. Referenční délka rotorového paketu před odlitím je 525 mm. Délka rotorového paketu po odlití a následně po vychladnutí se od referenční hodnoty liší, viz Tab. 14, kde jsou uvedeny naměřené hodnoty délky rotorového paketu tří rotorů, měřených vždy na třech různých místech, které byly získány od společnosti Siemens, s.r.o.

| | Po odlití [mm] | | | Po vychladnutí [mm] | | |
|----------|----------------|--------|--------|---------------------|--------|--------|
| rot č. 1 | 524.16 | 524.23 | 524.11 | 523.34 | 523.54 | 523.28 |
| rot č. 2 | 254.44 | 524.18 | 524.37 | 523.47 | 523.71 | 523.32 |
| rot č. 3 | 524.37 | 524.46 | 524.22 | 523.23 | 523.36 | 523.77 |

Tab. 14 – Naměřená délka rotorového paketu po odlití a vychladnutí

Průměrné stažení rotorového paketu po odlití je 0.72 mm a po vychladnutí 1.55 mm. Dále byl rotor zvážen a bylo zjištěno, že hmotnost rotoru činí 329 kg. Redukce hmotnosti na výpočtovém modelu byla provedena snížením hustoty rotorového paketu.

Stažení bylo ve výpočetním modelu implementováno zadáním okrajové podmínky posuvu na okraje rotorového paketu (viz Obr. 33), kde na každé straně byla zadána hodnota poloviny stažení působící proti sobě v axiálním směru. Nejprve bylo stažení testováno na modelu s neredukovanou hmotností a byl uvažován přesah mezi hřídelem a rotorovým svazkem. Výsledky této analýzy jsou zobrazeny v Tab. 15.

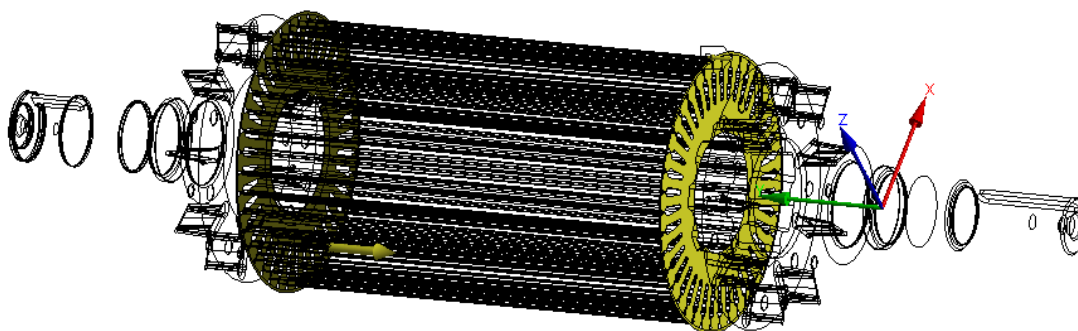
| Pořadí frekvence | Vlastní frekvence [Hz] | | | | | | |
|---------------------|------------------------|---|--------------|------------------------|--------------|---------------------|--------------|
| | Měření | TCS, mean, E = 210 GPa, hmotnost = 348 kg | | | | | |
| | | Stažení 0.378 mm | Chyba [%] | Stažení 0.420 mm | Chyba [%] | Stažení 0.775 mm | Chyba [%] |
| 4 | 558 | 547.3 | -1.6 | 546.4 | -1.8 | 542.4 | -2.5 |
| 5 | | 550.7 | | 549.8 | | 545.9 | |
| 6 | 842 | 711.7 | -15.2 | 710.4 | -15.4 | 704.8 | -16.1 |
| 7 | | 715.6 | | 714.4 | | 708.9 | |
| 8 | 1220 | 1295.7 | 6.3 | 1292.4 | 6.0 | 1044.3 | - |
| 9 | | 1297.5 | | 1293.7 | | 1271.8 | 4.3 |
| 10 | 1780 | 1707.5 | -3.7 | 1704.5 | -3.9 | 1272.7 | |
| 11 | | 1720.0 | | 1716.9 | | 1417.0 | |
| 12 | 2120 | 1984.9 | | 1891.2 | | 1688.8 | -4.8 |
| 13 | | 2113.9 | | 2060.1 | | 1700.8 | |
| 14 | | 2321.6 | 10.4 | 2256.3 | | 1877.0 | |
| 15 | | 2358.0 | | 2354.0 | 11 | 2334.9 | 10.1 |

Tab. 15 – Vliv stažení při neredukované hmotnosti rotoru

| Pořadí frekvence | Vlastní frekvence [Hz] | | | | |
|---------------------|------------------------|---|-----------|--------------------|-----------|
| | Měření | TCS, mean, E = 210 GPa, hmotnost = 329 kg | | | |
| | | Stažení 0.21 mm | Chyba [%] | Stažení 0.42 mm | Chyba [%] |
| 4 | 558 | 555.0 | -0.2 | 547.0 | -1.7 |
| 5 | | 558.3 | | 550.4 | |
| 6 | 842 | 722.9 | -13.9 | 711.6 | -15.3 |
| 7 | | 726.7 | | 715.6 | |
| 8 | 1220 | 1335.0 | 9.6 | 1310.5 | 7.5 |
| 9 | | 1339.4 | | 1312.7 | |
| 10 | 1780 | 1746.6 | -1.5 | 1723.1 | -2.9 |
| 11 | | 1759.3 | | 1734.9 | |
| 12 | 2120 | 2362.7 | | 1891.8 | |
| 13 | | 2404.2 | -13.8 | 2062.6 | |
| 14 | | 2416.7 | | 2260.7 | 9.2 |
| 15 | | 2419.4 | | 2370.7 | |

Tab. 16 – Vliv stažení při redukované hmotnosti rotoru

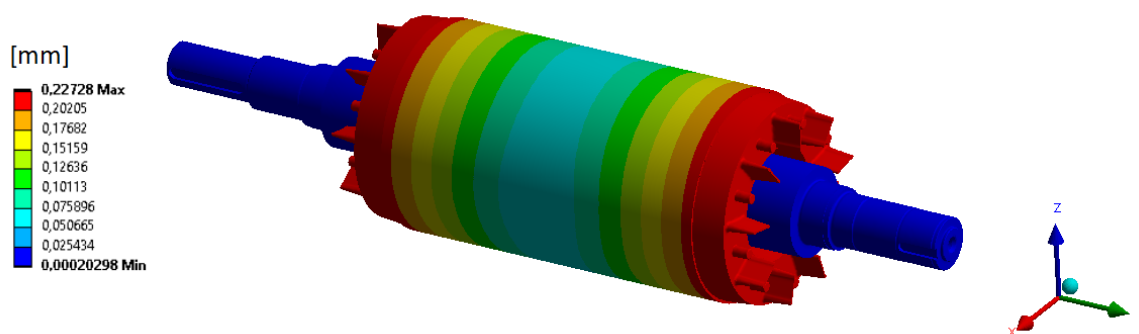
Poté byla provedena redukce hmotnosti rotorového paketu a byla provedena analýza vlivu stažení na redukovaném modelu. Výsledky analýzy na redukovaném modelu jsou v Tab. 16.



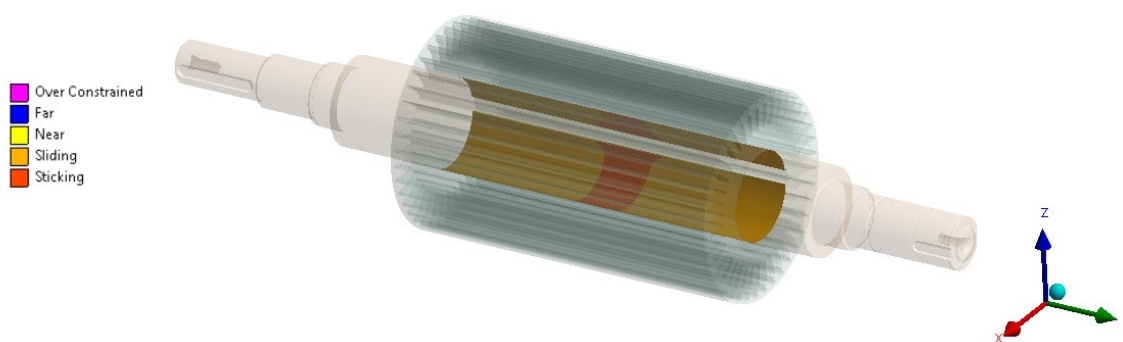
Obr. 33 – Okrajová podmínka stažení rotorového paketu

Z výsledků při neredukované hmotnosti dosahují výsledky nejlepší shody při hodnotě stažení 0.378 mm a s rostoucí hodnotou stažení roste i relativní chyba od naměřených dat. Tohoto poznatku bylo využito při modelování stažení na rotoru s redukovanou hmotností, kdy byla testována i nižší hodnota stažení 0.21 mm a výsledky dosahují velmi dobré shody na první vlastní frekvenci, ale druhá stále nesouhlasí s měřením. Obecně lze tvrdit, že pro daný rotor s rostoucí hodnotou stažení klesá tuhost rotoru a jeho vlastní frekvence.

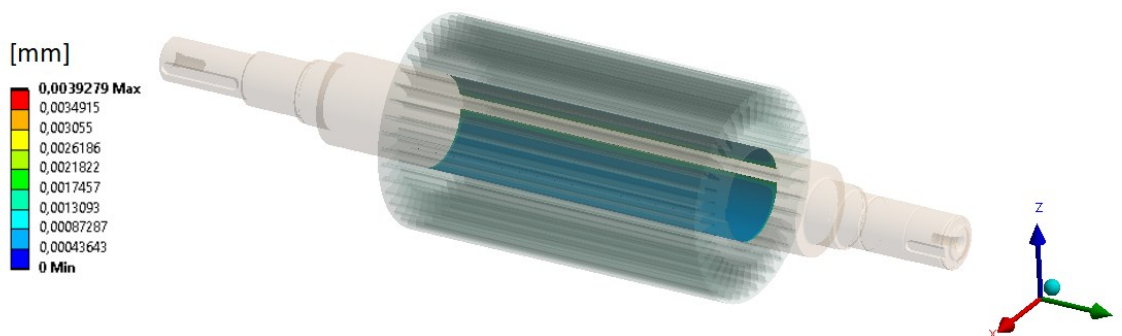
Při stažení rotorového svazku se výsledky statické analýzy liší od analýzy bez stažení. Pro ilustraci jsou uvedeny výsledky statické analýzy na redukovaném modelu při stažení 0.21 mm na každé straně a středním přesahu. Na Obr. 34 jsou zobrazeny celkové posuvy. Z Obr. 35 popisující status kontaktu je patrná oblast ve středu hřídele, kde jsou kontaktní plochy pouze v dotyku a krajní části, kde dochází ke skluzu kontaktních ploch. Hodnoty penetrace dosahují dostačně nízkých hodnot vzhledem k přesahu součástí (viz Obr. 36). Nakonec jsou na Obr. 37 zobrazeny kontury kontaktního tlaku, který vlivem stažení rotorového paketu poklesl. Kontaktní tlak není konstantní po délce, ale v oblasti středu, kde nedochází ke skluzu je tlak vyšší, než v krajních oblastech, kde ke skluzu dochází.



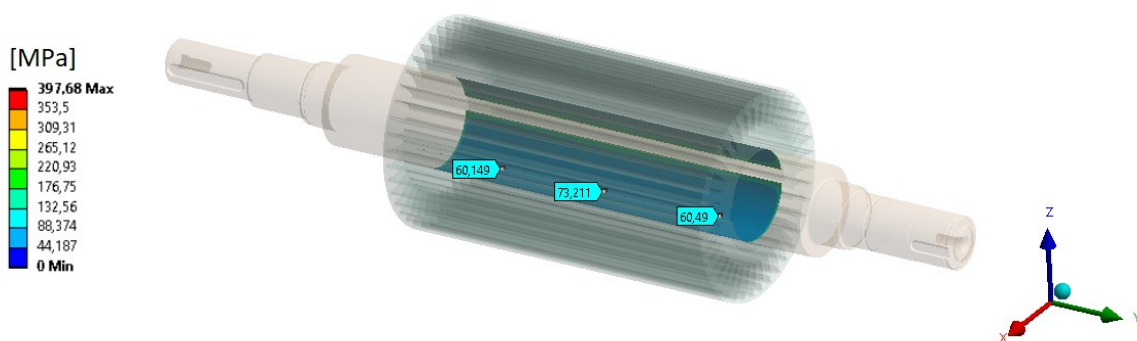
Obr. 34 – Hodnoty posuvu při statické analýze stažení paketu (mean)



Obr. 35 – Status kontaktu při statické analýze stažení paketu (mean)

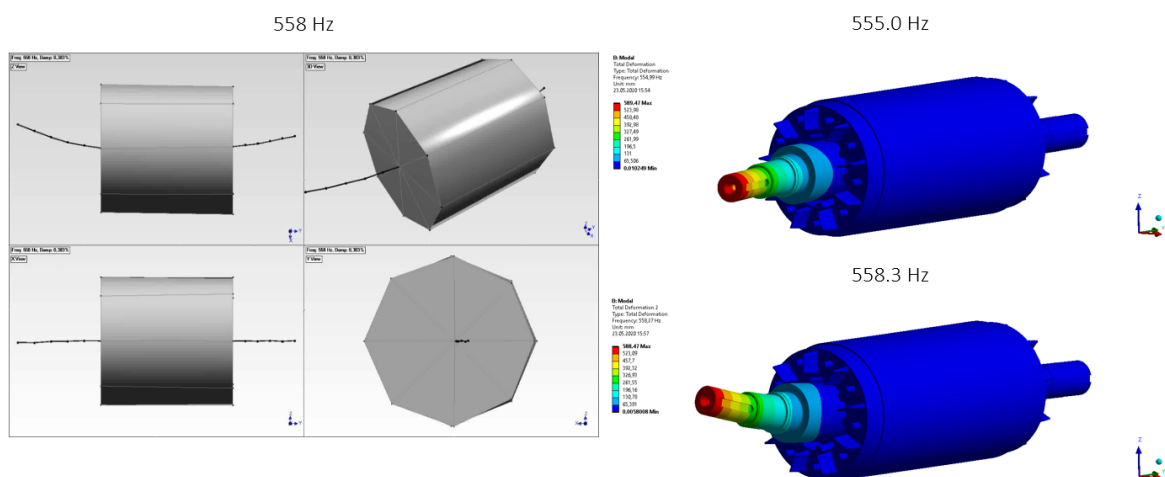


Obr. 36 – Hodnoty penetrace při statické analýze stažení paketu (mean)

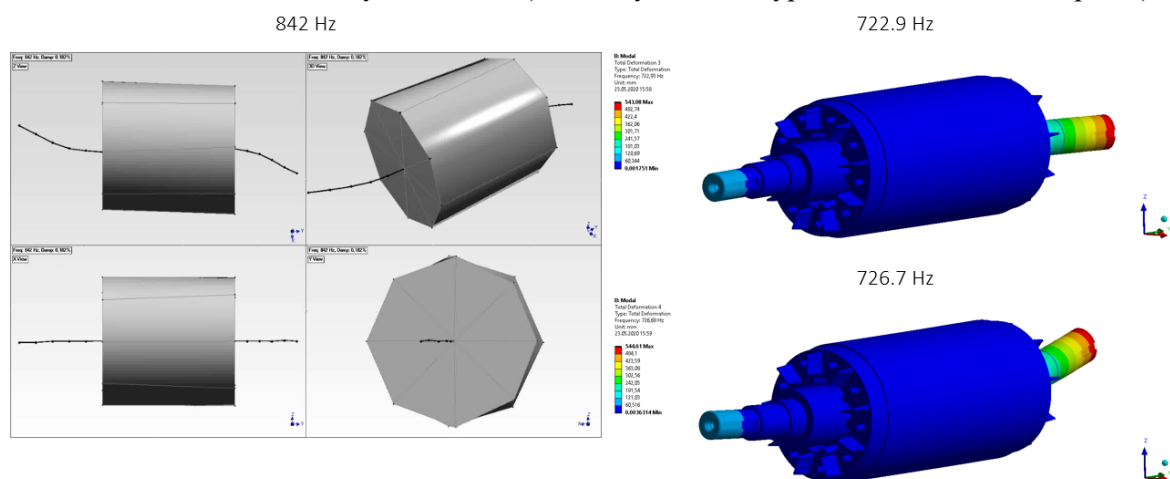


Obr. 37 – Hodnoty kontaktního tlaku při statické analýze stažení paketu (mean)

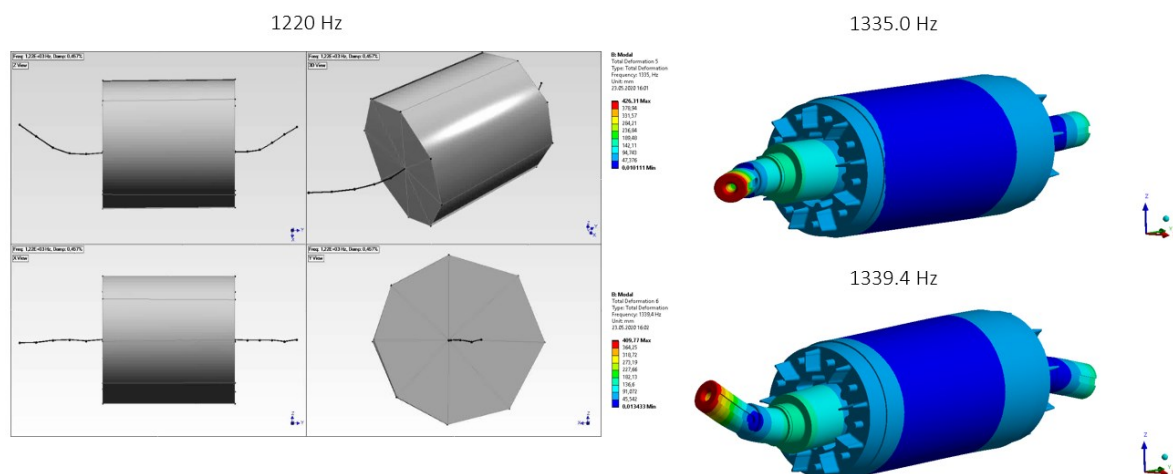
Vypočítané vlastní módy při stažení 0.21 mm na redukovaném modelu jsou porovnány s naměřenými módy na Obr. 38, Obr. 39, Obr. 40, Obr. 41, a Obr. 42. Z porovnání druhého a třetího módu (viz Obr. 39 a Obr. 40) lze pozorovat, že druhý vypočítaný vlastní mód odpovídá třetímu naměřenému, a třetí vypočítaný vlastní mód odpovídá druhému naměřenému. Obdobně jsou prohozeny 4. a 5. vypočítaný vlastní mód (viz Obr. 41 a Obr. 42).



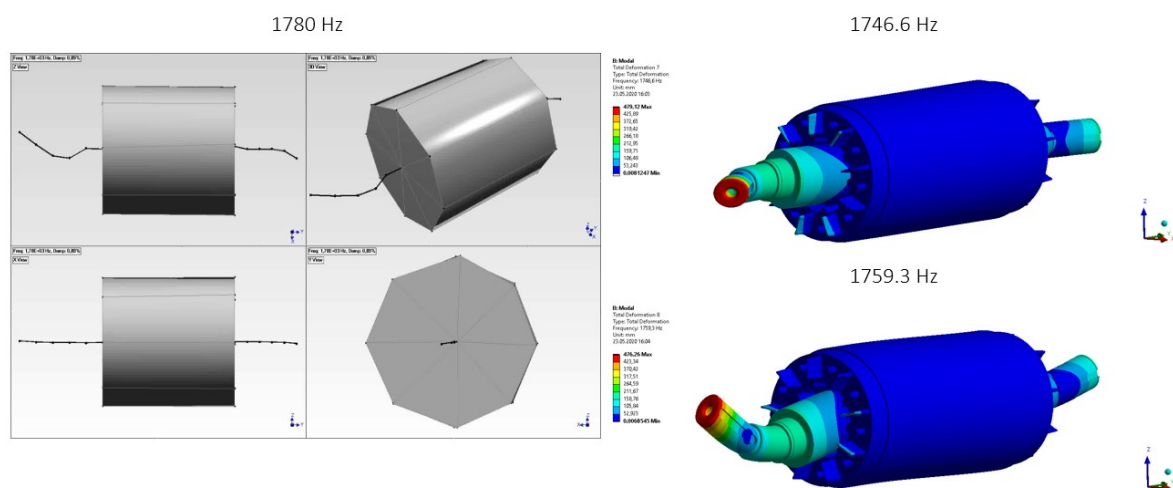
Obr. 38 – První nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané se stažením – vpravo)



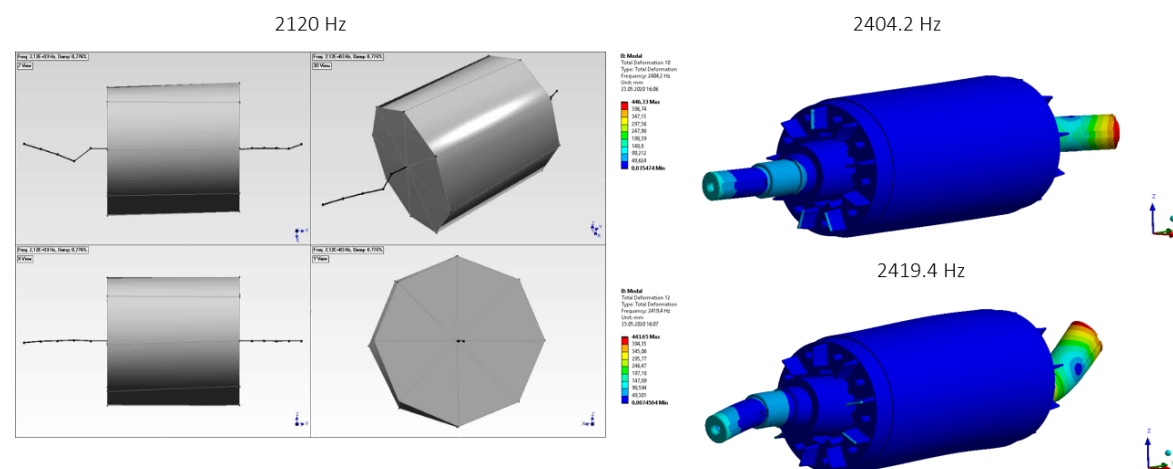
Obr. 39 – Druhý nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané se stažením – vpravo)



Obr. 40 – Třetí nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané se stažením – vpravo)



Obr. 41 – Čtvrtý nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané se stažením – vpravo)



Obr. 42 – Pátý nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané se stažením – vpravo)

3.8. Vliv transversální izotropie rotorového paketu

V kapitole 1.4 byly odvozeny vztahy pro výpočet materiálových vlastností rotorového paketu uvažovaného jako materiál transversálně izotropní. Svazek daného rotoru je tvořen ocelovými plechy a epoxidovou izolací. Materiálové vlastnosti dílčích materiálů paketu jsou uvedeny v Tab. 17. Modul pružnosti epoxidu byl převzat z práce [3].

| | Plechý | Izolace |
|-----------------------------|--------|---------|
| E [GPa] | 210 | 3 |
| μ [-] | 0.3 | 0.3 |
| ρ [kgm ⁻³] | 7850 | 1300 |
| t [mm] | 0.5 | 0.002 |

Tab. 17 – Materiálové vlastnosti plechů a izolace

V Tab. 18 jsou uvedeny elastické konstanty vypočítány postupem uvedeným výše, kdy směr y odpovídá směru 1, a směry x a z odpovídají směrům 2 a 3. Analyticky vypočtené hodnoty modulu pružnosti jsou porovnány hodnotami vypočtenými metodou konečných prvků (MKP).

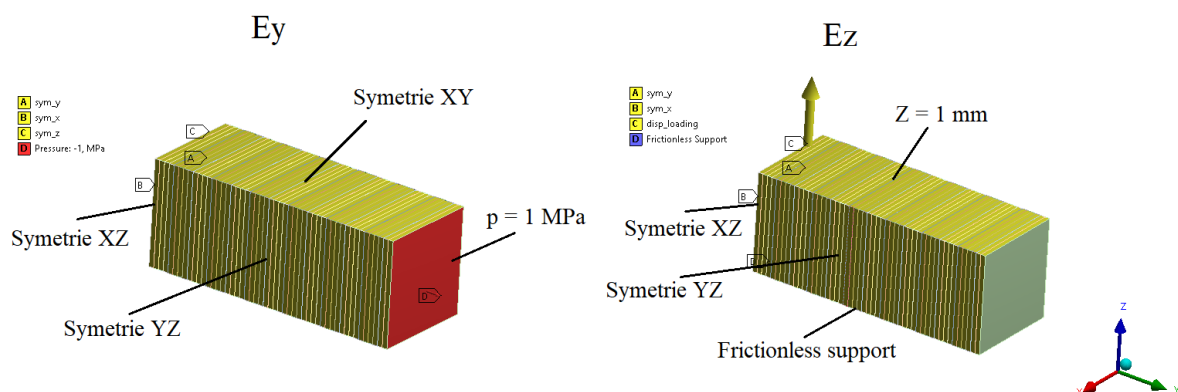
| | Analyticky | MKP | Chyba [%] |
|----------------|------------|-------|-----------|
| E_x [GPa] | 209.2 | 209.2 | 0 |
| E_y [GPa] | 164.7 | 165.4 | 0.4 |
| E_z [GPa] | 209.2 | 209.2 | 0 |
| μ_{xy} [-] | 0.3 | - | - |
| μ_{yz} [-] | 0.236 | - | - |
| μ_{xz} [-] | 0.3 | - | - |
| G_{xy} [GPa] | 62.6 | - | - |
| G_{yz} [GPa] | 80.5 | - | - |
| G_{xz} [GPa] | 62.6 | - | - |

Tab. 18 – Elastické konstanty rotorového paketu uvažovaného jako transversálně izotropní

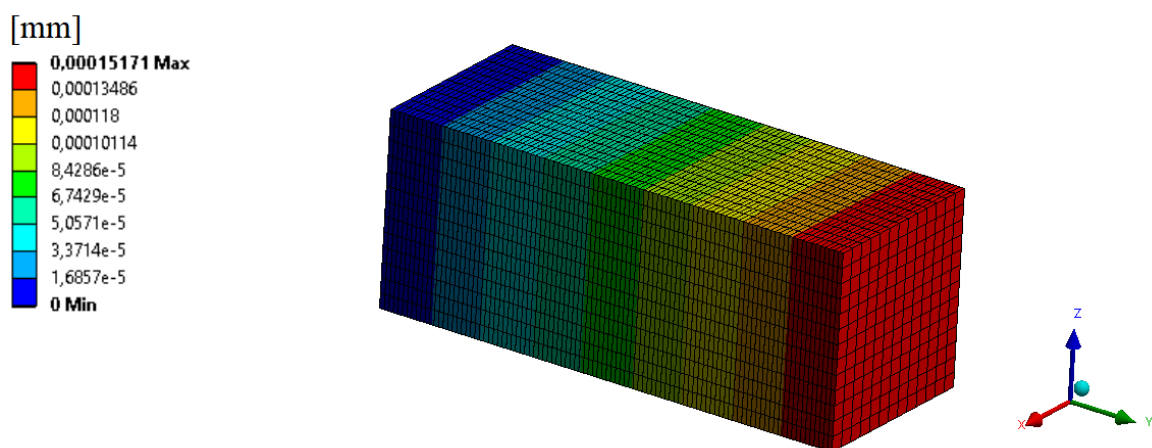
Okrajové podmínky pro výpočet modulů pružností pomocí MKP jsou zobrazeny na Obr. 43. Úloha je modelována pomocí 50 plechů a 49 izolací spojených kontaktem „no separation“ formulovaný jako MPC a příčnými rozměry 10x10 mm. Modul pružnosti ve směru skládání plechů E_y je vypočítán ze zatížení 1 MPa ve směru y . Modul pružnosti je pak vypočítán jako podíl napětí ku poměrné deformaci:

$$E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma L_0}{\Delta L}, \quad 3.10$$

kde σ je napětí (v úloze to je hodnota zatížení), L_0 je délka nezatíženého laminátu, a ΔL je posuv laminátu ve směru y při zatížení. Deformace laminátu po zatížení je zobrazena na Obr. 44.



Obr. 43 – Okrajové podmínky pro výpočet modulu pružnosti ve směru y (vlevo) a z (vpravo)



Obr. 44 – Posuv ve směru osy y pro určení E_y

Po dosazení do vztahu 3.10 se získá hodnota:

$$E_y = \frac{1 \cdot 25.098}{1.5171 \cdot 10^{-4}} = 165.4 \text{ MPa.} \quad 3.11$$

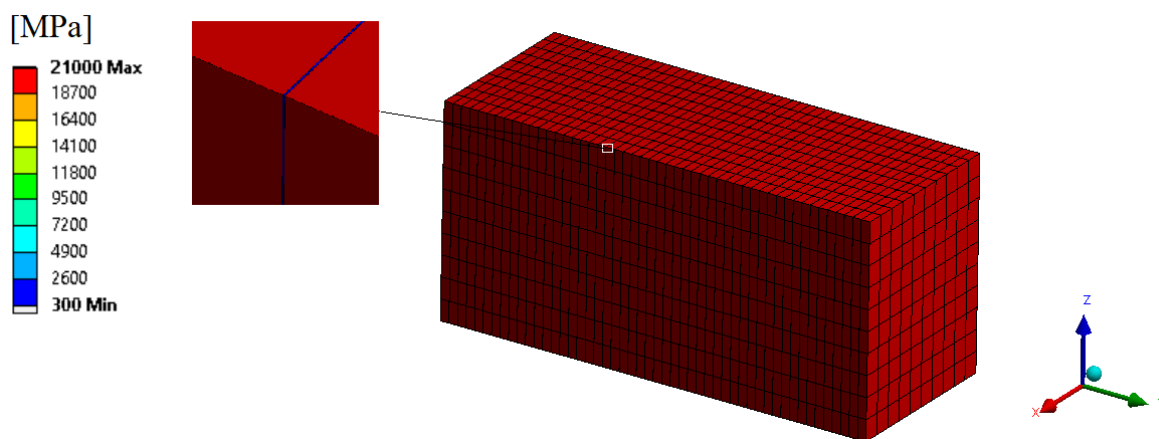
Modul pružnosti ve směru z byl vypočítán skrze simulaci jednotkového posuvu ve směru z. Následně bylo vyhodnoceno napětí Obr. 45, ze kterého byla vypočtena reakční síla jako:

$$P = \sigma_i A_i N_i + \sigma_p A_p N_p, \quad 3.12$$

kde σ_i je napětí na izolaci, σ_p napětí na plechu, A_i plocha jedné izolace v řezu rovinou xy, A_p plocha jednoho plechu v řezu rovinou xy, N_i počet izolací a N_p je počet plechů. Modul pružnosti ve směru z je pak:

$$E_z = \frac{P}{\frac{\Delta w}{w_0}} = \frac{P w_0}{A \Delta w}, \quad 3.13$$

kde A je celková plocha laminátu v řezu rovinou xy, w_0 je rozměr laminátu ve směru z, a Δw je deformace laminátu ve směru z (v úloze to je jednotkový posuv).



Obr. 45 – Hodnoty napětí pro určení E_z

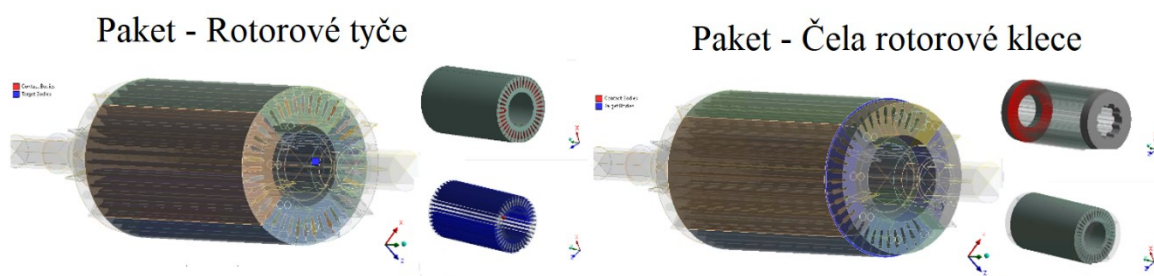
Po dosazení 3.12 do 3.13 se získá výsledná hodnota:

$$E_z = 209.2 \text{ MPa.} \quad 3.14$$

Mezi moduly pružnosti vypočtenými analyticky a metodou konečných prvků panuje shoda s relativní chybou menší než 1 %. Analytické výsledky byly implementovány do výpočtového modelu a zkoumal se vliv transversální izotropie (TI) rotorového paketu na vlastní frekvence rotoru. Byly testovány konfigurace, kdy kontakt mezi rotorovými tyčemi a rotorovým paketem byl „bonded“ stejně jako kontakt mezi čely rotorové klece a paketu. A dále konfigurace, kdy jeden z těchto kontaktů byl nastaven jako typ „no separation“ (viz Obr. 46). Hodnota stažení je u všech konfigurací 0.21 mm a je počítáno s redukovanou hmotností rotoru. Výsledky jsou zobrazeny v Tab. 19.

| Pořadí frekvence | Vlastní frekvence [Hz] | | | | | | |
|---------------------|------------------------|---|-----------|-----------------|-----------|-----------------|-----------|
| | Měření | TCS, mean, TI, Hmotnost = 329 kg, Stažení = 0.21 mm | | | | | |
| | | „Bonded“ | Chyba [%] | „No separation“ | | | |
| | | | | Svazek, Čela | Chyba [%] | Svazek, Tyče | Chyba [%] |
| 4 | 558 | 537.2 | 3.5 | 553.2 | 0.6 | 547.5 | 1.7 |
| 5 | | 539.4 | | 555.5 | | 549.6 | |
| 6 | 842 | 711.7 | 15.3 | 733.5 | 12.7 | 725.3 | 13.7 |
| 7 | | 714.7 | | 736.71 | | 728.2 | |
| 8 | 1220 | 1239.7 | -1.7 | 1256 | -3.1 | 1155.2 | 5.2 |
| 9 | | 1242.6 | | 1258.5 | | 1158.8 | |
| 10 | 1780 | 1689 | 4.9 | 1722.5 | 3.1 | 1617.4 | |
| 11 | | 1694.5 | | 1728.9 | | 1684.2 | 5.2 |
| 12 | 2120 | 2212.8 | | 2384.2 | | 1690.5 | |
| 13 | | 2301.5 | | 2429 | -14.9 | 2383.1 | -12.7 |
| 14 | | 2370.3 | -12.1 | 2443.3 | | 2394.1 | |
| 15 | | 2383.7 | | 2594.4 | | 2569.9 | |

Tab. 19 – Vliv transversální izotropie

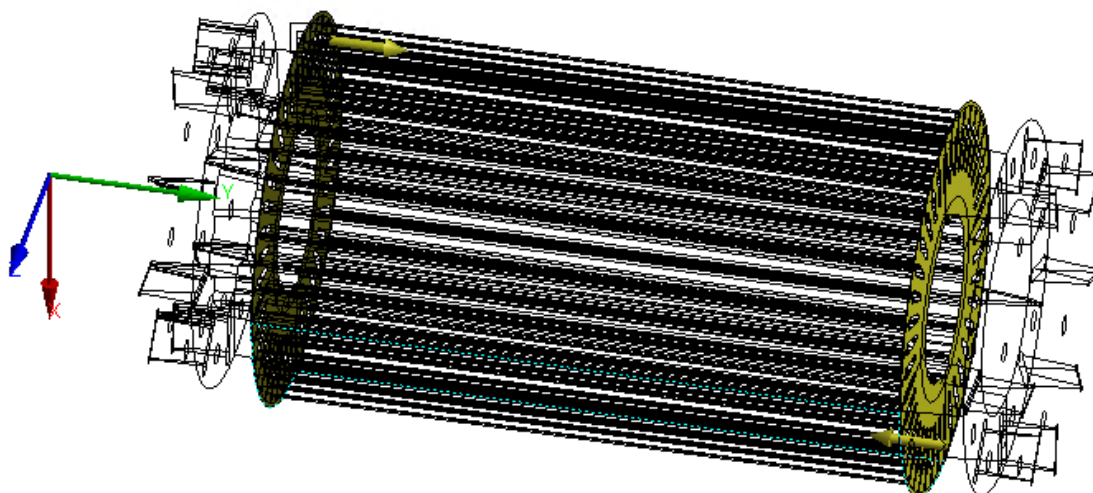


Obr. 46 – Kontakty mezi paketem a plechy (vlevo) a mezi paketem a čely rotorové klece (vpravo)

Z výsledků je patrné, že použití transversální izotropie má na výsledky vliv a při nastavení kontaktu „no separation“ mezi paketem a čely rotorové klece dosahují výsledky dosud nejlepší shody. Stále je ale příliš velká reaktivní chyba 2. vlastní frekvence od měření. Dosud byly probírány zásadní výrobní a technologické parametry a jejich vliv na vlastní frekvence rotoru, ale nebyl zkoumán vliv způsobu implementace.

3.8.1. Modelování stažení skrze sílu

Stažení bylo dosud modelováno skrze posuv zadán na čela rotorového paketu (viz Obr. 33). Stažení je implementováno na rotorový paket, který je již v kontaktu s hřídelí, tudíž je stažení ovlivněno tímto kontaktem. Vliv kontaktů na stažení paketu lze eliminovat implementací stažení silou na čela rotorového paketu. Velikost této síly představující stažení lze určit ze simulace stažení rotorového paketu. V této simulaci je zadána okrajová podmínka stažení posuvem shodně s Obr. 33, s tím rozdílem, že je rotorový svazek modelován bez hřídele Obr. 47. Výsledná síla potřebná ke stažení je poté určená z reakční síly okrajové podmínky. Hodnoty reakční síly jsou pro různé hodnoty stažení uvedeny v Tab. 20 spolu s maximálním napětím von Mises na svazku.



Obr. 47 – Určení síly symbolizující stažení rotorového paketu

| Stažení [mm] | Maximální napětí [MPa] | Reakční síla [kN] |
|--------------|------------------------|-------------------|
| 0.21 | 159.3 | 7342.7 |
| 0.36 | 273.1 | 12588 |
| 0.775 | 587.9 | 27098 |

Tab. 20 – Výsledky simulace stažení rotorového paketu

V Tab. 21 jsou uvedeny výsledky pro tři konfigurace. Nejprve je uvažováno se stažením 0.21 mm a je provedena analýza s uvažováním izotropního (ISO) materiálu rotorového paketu a následně s TI materiálem rotorového paketu. U třetí konfigurace je stažení zvětšeno na 0.36 mm.

| Pořadí frekvence | Vlastní frekvence [Hz] | | | | | | |
|---------------------|------------------------|---|-----------|---------|-----------|---------|-----------|
| | Měření | TCS, mean, hmotnost = 329 kg, Stažení zadáno silou: | | | | | |
| | | ISO | | TI | | TI | |
| | | 0.21 mm | Chyba [%] | 0.21 mm | Chyba [%] | 0.36 mm | Chyba [%] |
| 5 | 558 | 599.5 | -7.6 | 593.3 | -6.5 | 586..5 | -5.3 |
| 6 | | 601.5 | | 595.2 | | 588.4 | |
| 7 | 842 | 826.37 | 1.7 | 820 | 2.5 | 811 | 3.5 |
| 8 | | 829 | | 822.6 | | 813.7 | |
| 9 | 1220 | 1604.7 | -31.8 | 1577.7 | -29.6 | 1559.6 | -28.1 |
| 10 | | 1611.5 | | 1583.4 | | 1565 | |
| 11 | 1780 | 2290.6 | -29 | 2228.9 | -25.4 | 2154.8 | |
| 12 | | 2300.1 | | 2236 | | 2201.6 | -23.9 |
| 13 | 2120 | 2410.6 | | 2307.1 | | 2208.3 | |
| 14 | | 2682.1 | | 2585.3 | | 2358.3 | |
| 15 | | 2739.9 | | 2684.9 | | 2383.2 | |

Tab. 21 – Vliv implementace stažení rotorového paketu

Při této implementaci stažení dosahují hodnoty prvních dvou frekvencí dobrých výsledků, ale procentuální chyba u vyšších frekvencí strmě narostla, přičemž poslední naměřený vlastní mód není mezi prvními 15 vypočítanými vlastními módy.

3.8.2. Vliv rozdělení rotorového paketu

Jak bylo zmíněno v kapitole 1.4, modelování paketu skrze dílčí plechy a izolace je výpočetně nereálné, a proto byly odvozeny vztahy pro transversální izotropii paketu. Využitím tohoto materiálového modelu, ale nelze dobře zachytit spojení plechů a izolací, které jsou při odvození uvažovány jako dokonale slepené. Ve výpočetním modelu, ale lze využít aproximace a rozříznout rotorový paket na menší počet paketů s vlastnostmi

transverzální izotropie, a rozvolnit tak paket v radiálním směru pro přesnější popis fyzikálního problému.



Obr. 48 – Rozvolnění rotorového paketu v radiálním směru

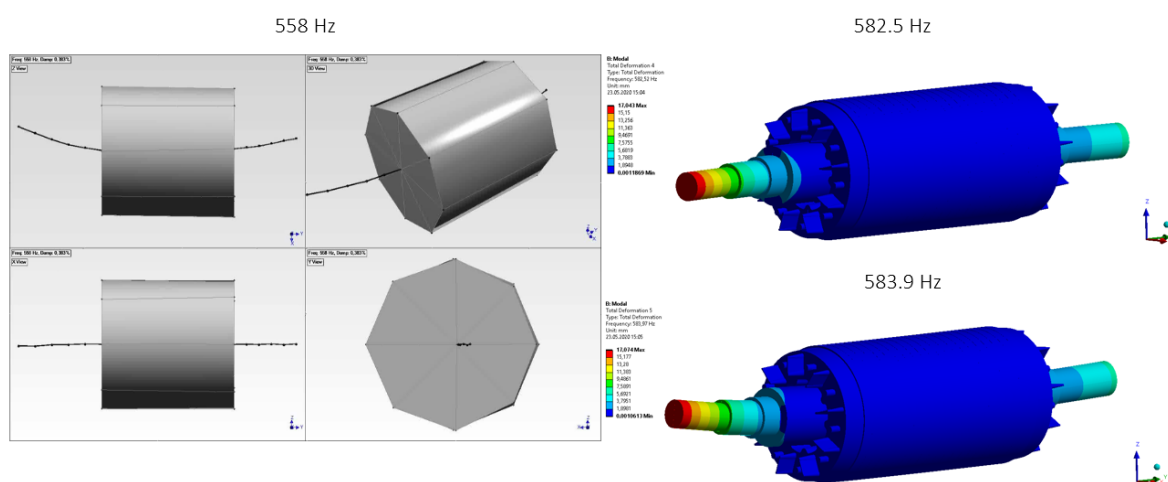
Rotorový paket má délku 525 mm, byl proto rozdělen na 21 stejně dlouhých paketů o délce 25 mm (viz Obr. 48). Kontakt mezi dílčími pakety je typu „no separation“ stejně jako kontakt mezi krajními pakety a čely rotorové klece. Jsou analyzovány dvě konfigurace, a to stažení 0.21 mm zadáno skrze posuv v prvním případě a skrze sílu v případě druhém.

| Pořadí frekvence | Vlastní frekvence [Hz] | | | | |
|---------------------|------------------------|----------------------------------|-----------|------------------------------|-----------|
| | Měření | TCS, mean, TI, hmotnost = 329 kg | | | |
| | | Stažení 0.21 mm - Posuv | Chyba [%] | Stažení 0.21 mm - Síla | Chyba [%] |
| 4 | 558 | 524.6 | 5.9 | 0 | |
| 5 | | 525.7 | | 582.5 | -4.5 |
| 6 | 842 | 697.1 | 17.1 | 583.9 | |
| 7 | | 698.9 | | 808.2 | 3.9 |
| 8 | 1220 | 1139.7 | 6.3 | 810.6 | |
| 9 | | 1147.8 | | 1528.7 | -25.3 |
| 10 | 1780 | 1636.5 | 8 | 1530.5 | |
| 11 | | 1638.2 | | 1634.9 | |
| 12 | 2120 | 1748.3 | | 2135.1 | -20 |
| 13 | | 2176.4 | | 2136.5 | |
| 14 | | 2294.5 | -8.3 | 2426 | |
| 15 | | 2298.5 | | 2590.9 | |

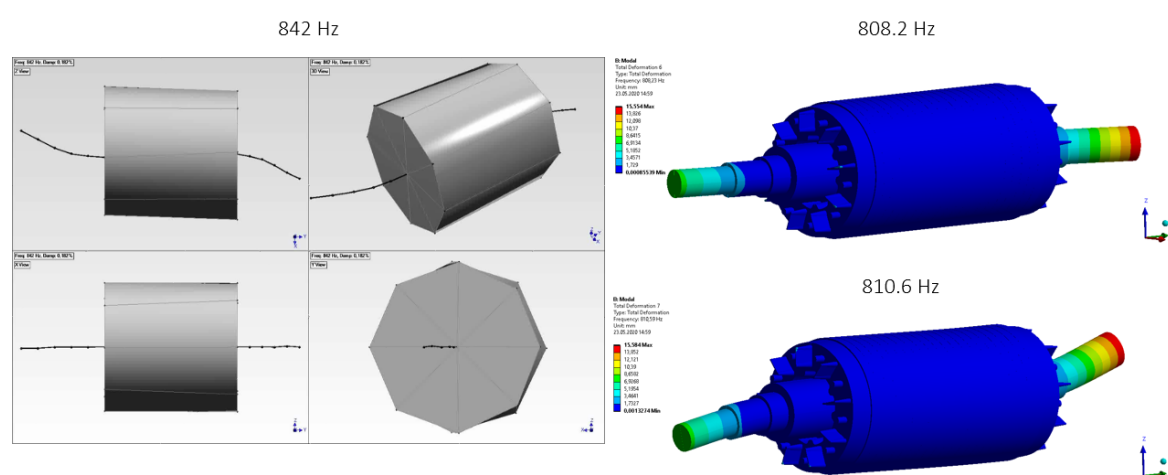
Tab. 22 – Vliv rozvolnění rotorového paketu

Z výsledků v Tab. 22 lze pozorovat, že při rozvolnění rotorového paketu v radiálním směru dochází k poklesu všech vlastních frekvencí rotoru. Při aplikaci stažení skrze okrajovou podmínku posuvu dosahují relativní chyby všech vypočtených hodnot od naměřených chyby větší než 5 %. Při aplikaci stažení skrze sílu bylo poprvé dosaženo výsledků, kdy chyba vypočtených prvních dvou vlastních frekvencí od naměřených je menší než 5 %.

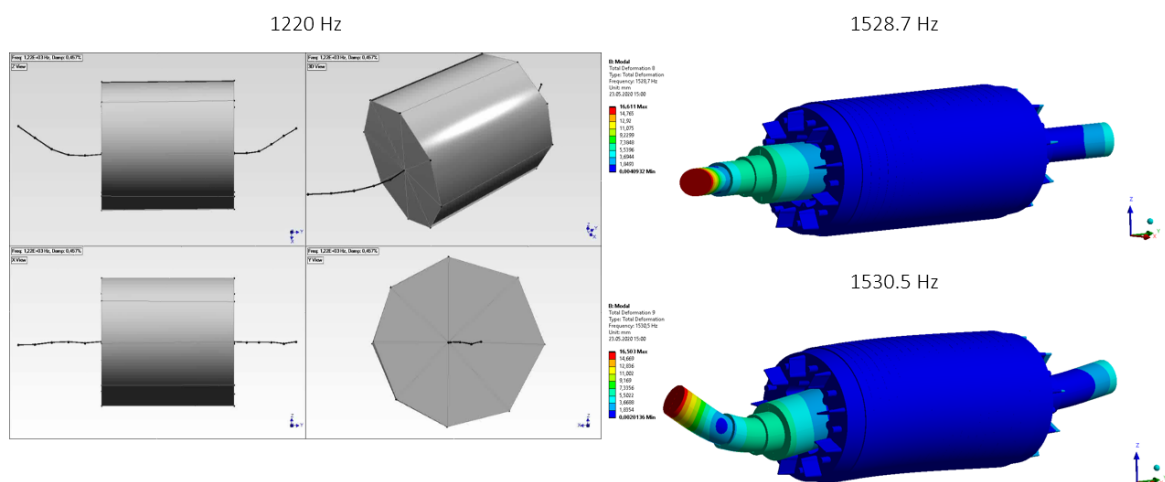
Vlastní módy při stažení skrze sílu jsou porovnány s naměřenými na Obr. 49, Obr. 50, Obr. 51, a Obr. 52. Z obrázků je patrné, že vypočtené tvary odpovídají naměřeným. Pátý naměřený vlastní mód není mezi prvními 15 vypočítanými.



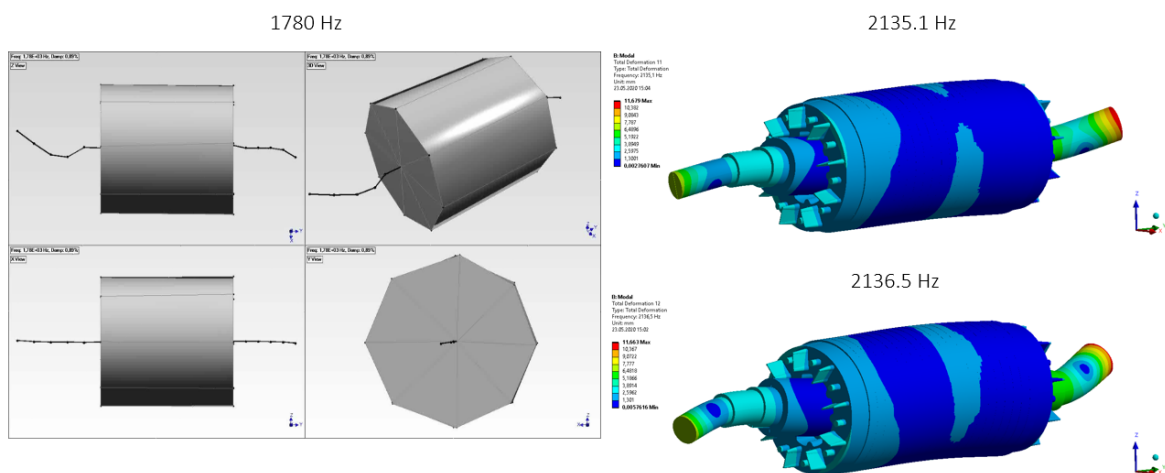
Obr. 49 – První nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané se stažením silou a rozvolněným paketem – vpravo)



Obr. 50 – Druhý nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané se stažením silou a rozvolněným paketem – vpravo)



Obr. 51 – Třetí nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané se stažením silou a rozvolněným paketem – vpravo)



Obr. 52 – Čtvrtý nenulový vlastní tvar (naměřený – vlevo, vypočítané se stažením silou a rozvolněným paketem – vpravo)

4. Návrh metodiky řešení modální analýzy rotoru

Pro řešení modální analýzy rotoru je potřeba dostatečně přesný geometrický model a znalost materiálových parametrů. Problematické je určení materiálových parametrů rotorového paketu, kde známe dílčí složky paketu, ale jejich interakce je idealizovaná při analytickém odvození za předpokladu transversální izotropie. Tyto výsledky je vhodné ověřit s experimentálním měřením modálních vlastností rotorového paketu, což v našem případě nebylo realizováno. Dále má zásadní vliv hmotnost rotoru, kdy se hmotnost určena podle tabulkových hodnot nemusí shodovat s reálným rotorem. V našem případě byl rozdíl 19 kg.

Po ověření geometrie a materiálových parametrů modelu je potřeba v první řadě definovat spojení hřídele a rotorového svazku, který je na hřídeli nalisován. Ve výpočetním modelu je to simulováno přesahem mezi součástmi. Hodnota přesahu je dána z tolerancí rozměrů hřídele a svazku. Výsledky modální analýzy se při změně hodnoty přesahu mezi minimální a maximální hodnotou výrazně nemění, a proto je vhodné ve výpočtech počítat s hodnotou střední.

Při porovnávání vypočítaných vlastních frekvencí s naměřenými je potřeba zprůměrovat vypočítané ohybové frekvence, neboť rotor je téměř axiálně symetrická součást. Proto jednomu naměřenému ohybovému módu odpovídají dva vypočítané, přičemž se jedná o stejný tvar, ale ve dvou vzájemně kolmých rovinách.

Důležitým parametrem je stažení rotorového paketu po odlití rotorové klece a následném vychladnutí. Tento parametr má zásadní vliv na modální vlastnosti rotoru. Při implementaci tohoto parametru pomocí okrajové podmínky posuvu bylo dosaženo nejlepší shody s měřením Tab. 23. V daném případě se ale nedaří naladit 2. vlastní frekvenci a 2. a 3. vypočítané vlastní tvary jsou prohozeny (viz kapitola 3.7). Problém s druhou vlastní frekvencí se daří vyřešit při implementaci stažení okrajovou podmínkou síly namísto posuvu. V tomto případě dobře odpovídají první dvě vlastní frekvence (viz Tab. 21) a vlastní tvary jsou shodné s měřením, ale vyšší frekvence se neshodují s naměřenými hodnotami.

Snížení vyšších frekvencí lze docílit při využití transversální izotropie a rozvolněním rotorového paketu v radiálním směru rozdělením na dílčí pakety s transversálně izotropními materiálovými parametry. Touto metodou je simulována nedokonalost spojení plechů a izolace. Tato metoda dává při implementaci stažení přes sílu velice dobré výsledky na prvních dvou frekvencích (viz Tab. 22), ale i přes rozvolnění paketu stále nedává dostatečně přesné výsledky na vyšších frekvencích.

Při výpočtu modálních vlastností je v neposlední řadě potřeba zkoumat i vliv spojení dílčích součástí, zejména rotorové klece a rotorového paketu (viz Tab. 19). Konkrétně se jedná o kontakt mezi čely klece a okraji paketu, a kontakt mezi tyčemi rotorové klece a paketem, kde po vychladnutí dojde k mírnému smrštění tyčí a zároveň ke stažení svazku.

| Pořadí frekvence | Vlastní frekvence [Hz] | | | | |
|---------------------|------------------------|---|-----------|---------------------------------|-----------|
| | Měření | TCS, mean, hmotnost = 329 kg, stažení = 0.21 mm | | | |
| | | ISO – posuv | Chyba [%] | TI – síla, rozvolněný svazek | Chyba [%] |
| 4 | 558 | 555.0 | 0.2 | 0 | |
| 5 | | 558.3 | | 582.5 | -4.5 |
| 6 | 842 | 722.9 | 13.9 | 583.9 | |
| 7 | | 726.7 | | 808.2 | 3.9 |
| 8 | 1220 | 1335.0 | -9.6 | 810.6 | |
| 9 | | 1339.4 | | 1528.7 | -25.3 |
| 10 | 1780 | 1746.6 | 1.5 | 1530.5 | |
| 11 | | 1759.3 | | 1634.9 | |
| 12 | 2120 | 2362.7 | | 2135.1 | -20 |
| 13 | | 2404.2 | -13.8 | 2136.5 | |
| 14 | | 2416.7 | | 2426 | |
| 15 | | 2419.4 | | 2590.9 | |

Tab. 23 – Nejlepší shoda výpočtů s měřením

5. Závěr

Cílem této práce byl návrh metodiky k výpočtu modálních vlastností rotoru 2-pólového asynchronního elektromotoru. Práce se skládá ze čtyř částí. První část se věnuje literární rešerši a úvodu do problematiky zahrnutí rotoru do výpočetního modelu. V této části byly stručně popsány asynchronní elektromotory, dále byla definovaná elastická anizotropie, ortotropní materiály a transverzálně izotropní materiály. Poté bylo provedeno odvození pro aproximaci rotorového paketu jako transverzálně izotropního materiálu.

V druhé části byla provedena testovací úloha zkoumající vliv kontaktů a předpětí na výsledky modální analýzy. Stručně byly popsány formulace kontaktů používané v softwaru ANSYS a metody implementace předpětí do modální analýzy.

Ve třetí a obsahově nejrozsáhlejší části byl proveden výpočet vlastních frekvencí rotoru, zkoumán vliv technologických a výrobních parametrů, a výsledky byly porovnány s naměřenými hodnotami. Nejprve byl analyzován vliv přesahu při nalisování rotorového svazku na hřídel. Následuje analýza vlivu spojení sítě výpočetního modelu pomocí sdílené topologie a skrze kontakt „bonded“. Z výsledků vyplývá, že spojení sítě má na výsledky modální analýzy zanedbatelný vliv. V práci bylo nejprve počítáno s rotorovým paketem uvažovaným jako izotropní materiál s parametry oceli plechů, kterými je tvořen. Pro tuto konfiguraci byla provedena analýza vlivu modulu pružnosti paketu na modální vlastnosti. Z výsledků vyplývá, že modul pružnosti významně ovlivňuje výsledky, a proto byla provedena informativní optimalizace materiálového modelu, kdy byl uvažován proměnný modul pružnosti, Poissonova konstanta a hustota rotorového paketu. Z optimalizace lze vyvozovat, že pro naladění modelu je potřeba snížit hustotu a modul pružnosti rotorového paketu, a proto je potřeba mít k dispozici změřené vlastní frekvence. Následně bylo testováno stažení rotorového paketu dle výsledku měření jeho délky po odlití a vychladnutí rotorové klece, a zároveň byla redukována hmotnost rotorového paketu, neboť hmotnost rotoru po zvážení byla o 19 kg menší než hmotnost modelu. Stažení bylo definovanou okrajovou podmínkou posuvu na čela paketu. Při hodnotě stažení 0.21 mm na každé straně dosahovaly výsledky dobré shody s měřením, ale u 2. vlastní frekvence byla relativní chyba větší než 13 %. Následně byl použit materiálový model transverzální izotropie na paket a bylo testováno shodné stažení. Bylo dosaženo dosud nejlepších výsledků, ale 2. vlastní frekvence stále dosahovala chyby větší než 12 %. Druhá vlastní frekvence se podařila naladit až zadáním stažení okrajovou podmínkou síly namísto posuvu, což je považováno za fyzikálně správnější přístup. V daném případě dosahují první dvě vlastní frekvence přijatelných hodnot, ale rozladily se tím frekvence vyšší, kdy relativní chyba dosahuje hodnot vyšších než 20 %. Nakonec bylo testováno rozvolnění paketu v radiálním směru rozdělením na 21 dílčích shodných paketů spojených kontaktem „no separation“. V daném případě se při stažení implementovaném skrze sílu dosáhlo relativní chyby na prvních dvou

frekvencích do 5 % ale i přes snížení hodnot vyšších frekvencí nebylo dosaženo přijatelné chyby.

Poslední kapitola se zabývá návrhem metodiky k výpočtu modálních vlastností rotoru. V této kapitole je ve stručnosti uveden postup tvorby a verifikace výpočtového modelu, který vedl v daném případě k nejlepším výsledkům.

V této diplomové práci bylo dosaženo dobré shody výpočtů a naměřených dat. Dílčím nedostatkem je relativní chyba druhé vlastní frekvence, která se nepodařila spolehlivě snížit, aniž by se nerozladily vyšší frekvence.

Výsledky této práce jsou podnětem pro další práci na verifikaci výpočtového modelu. Významným přínosem by byla znalost hmotnosti rotorového paketu po naskládání a následně hmotnost rotorového svazku s klecí po odlítí, neboť rozdíl hmotnosti modelu a hmotnosti měřeného rotoru byl implementován redukcí hustoty rotorového paketu, což má vliv na rozložení hmotnosti. V rámci dalšího výzkumu by bylo potřeba provést měření modálních vlastností na jednotlivých částech rotoru a to hřídeli, rotorovém svazku s klecí a sestaveném rotoru.

Seznam použité literatury

- [1] Kocsis, I. G.: Nikola Tesla's Life and Work [online]. Dostupné z: <http://www.teslabook.fw.hu/>
- [2] Toliyat, H. A.; Kliman, G. B.: Handbook of electric motors. 2nd ed. Boca Raton: CRC & Taylor Francis Group, 2004. ISBN 0-8247-4105-6.
- [3] Millithaler, P.; Dynamic behaviour of electric machine stators – Modelling guidelines for efficient finite-element simulations and design specifications for noise reduction. Thesis 2015, DOI: 10.13140/RG.2.1.3882.0565.
- [4] Pupadubsin, R.; Steven, A.; Widmer, J.; Mecrow, B. C.: Mechanical material properties for structural simulation model of switched reluctance machines. *International Conference on Electrical Machines (ICEM), XXII 2016*, s. 2293-2299.
- [5] Jones, R.; The Mechanics of Composite Materials. CRC Press, 1998, ISBN 156032712X.
- [6] Lekhniskii, S. G.; Theory of elasticity of an anisotropic body: Teorija uprugosti anizotropnogo tela. Moskva 1977, anglický překlad: Mir Publishers 1981.
- [7] Sadd, M. H.; Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Academic Press 2009, ISBN 9780123744463.
- [8] Dill, E.H.; The finite element method for mechanics of solids with ANSYS applications. CRC Press 2011, ISBN-10: 1439845832.
- [9] ANSYS Release 9.0 Documentation. Contact Technology Guide: ANSYS Inc., 2004.
- [10] Festo Didactic: Three-Phase Wound-Rotor Induction Machines. Lab-Volt, 2014. ISBN 978-2-89747-170-5.
- [11] Qiu, J.; Zhou, M.: Analytical Solution for Interference Fit for Multi-Layer Thick-Walled Cylinders and the Application in Crankshaft Bearing Design. *Applied Sciences June 2016*. DOI: 10.3390/app6060167.
- [12] Prem, M. S.; Klanner, M.; Ellermann, K.; Vibration analysis of a rotor of an electrical rotating machine with stochastically distributed input parameters. in Proceedings of 13th SIRM: The 13th International Conference on Dynamics of Rotating Machinery. *SIRM 2019 – 13th International Conference on Dynamics of Rotating Machines, Copenhagen, Denmark, 13/02/19*. DTU Lyngby, Denmark, Copenhagen 2019, s. 502-511.